УДК 517.95

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

Акимов А.А.

доцент,

Стерлитамакский филиал БашГУ,

Стерлитамак, Россия

Агафонова А.А.

Студент,

Стерлитамакский филиал БашГУ,

Стерлитамак, Россия

Аннотация. В статье рассмотрена краевая задача типа Неймана для уравнения смешанного типа, которая является математической моделью околозвуковых и сверхзвуковых течений. В эллиптической и гиперболической областях решены вспомогательные задачи. В результате «склейки» решений этих задач на линии изменения типа, получено сингулярное интегральное уравнение. Из существования решения этого уравнения следует существование решения для обобщенного уравнения Трикоми.

Ключевые слова: задача Неймана, уравнение Чаплыгина, уравнения смешанного типа

THE EXISTENCE THEOREM OF SOLUTION OF A NEUMANN TYPE PROBLEM FOR THE TRICOMI EQUATION

Akimov A.A.

PhD, Associate Professor,

Bashkir state university Sterlitamak branch,

Sterlitamak, Russia

Agafonova A.A.

student,
Bashkir state university Sterlitamak branch,
Sterlitamak, Russia

Annotation. In this paper we consider the problem of a Neumann-type boundary value problem for a mixed-type equation, which is a mathematical model of transonic and supersonic flows. The auxiliary problems are solved in the elliptic and hyperbolic domains. As a result of "gluing" the solutions of these problems on the line of type change, a singular integral equation is obtained. The existence of a solution of this equation implies the existence of a solution for the generalized Tricomi equation.
Keywords: Neumann problem, Chaplygin equation, differential equation of mixed type

Изучая физический процесс обтекания клина сверхзвуковым потоком газа, Ф.И. Франкль [1] обнаружил, что образуется зона дозвуковых скоростей, которая расположена перед клином и, в результате, возникает новая краевая задача, для которой на некоторой части эллиптической границы Г имеет место дифференциальное соотношение $P(x,y)u_x + Q(x,y)u_y = 0$, где P и Q – некоторые заданные функции. Вместо условия Неймана, также можно использовать краевое условие с наклонной производной.

Рассмотрим уравнение Чаплыгина, являющегося уравнением смешанного типа

$$Lu = K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$ в области D, в полуплоскости $y > 0$ ограниченной кривой Γ с концами в точках $A(0,0)$ и $B(1,0)$, длины l, а при $y < 0$ характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения (1):

$$\gamma_1 : \xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = 0, \qquad \gamma_2 : \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt = 1.$$

Обозначим точку пересечения характеристик γ_1 и γ_2, как $C(1/2, y_C)$.

Кроме того, введем обозначения для эллиптической и гиперболической областей $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Для уравнения (1) в области D сформулируем задачу типа Неймана [2-5].

Задача типа Неймана. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) удовлетворяющее условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_- \cup D_+); \qquad (2)$$

$$\delta_s[u]|_\Gamma = K(y)u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l; \qquad (3)$$

$$\delta_x[u]|_{\gamma_1} = K(y)u_x \frac{dy}{dx} - u_y = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \qquad (4)$$

где s длина дуги кривой Γ, отсчитываемая против часовой стрелки от точки B, а φ и ψ − заданные функции. В точках A и B производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже $1-2\beta$.

Пусть $K(y) = sgny \cdot |y|^m$, $m = const > 0$, а $x = x(s), y = y(s)$ − параметрические уравнения кривой Γ. Пусть кривая Γ также удовлетворяет следующим условиям [1] (условия(Б)):

1) функции $x = x(s), y = y(s)$ на сегменте $[0,l]$ имеют непрерывные производные $x'(s)$ и $y'(s)$, такие, что $y'^2(s) + y'^2(s) \neq 0$; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гельдера на $[0,l]$;

2) в окрестностях точек A и B выполняется условие ортогонального подхода кривой Γ к оси абсцисс

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \le Cy^{m+1}(s).$$

Докажем существование решения задачи (1) − (4) в приведенном выше случае. Предварительно, в гиперболической области, рассмотрим задачу типа Дарбу, а в эллиптической задачу Неймана.

Задача типа Дарбу (Задача D). Найти в области D_- решение $u(x,y)$, уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}_-) \cap C^1(D_- \cup AB) \cap C^2(D_-);$$

$$\delta_s[u]|_{\gamma_1} = \psi(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}; \;\; u_y(x,0) = \nu(x), \quad x \in (0,1).$$

Так как в краевом условие содержатся только производные функции, то решение задачи не может быть единственным. Если положить $u(0,0) = 0$, то разрешимость поставленной задачи будет однозначной. Тогда решение задачи типа Дарбу в характеристических координатах будет имееть вид [1, с. 183]

$$u(\xi,\eta) = \gamma \int_0^{\xi} \frac{\nu(t)}{(\xi - t)^{\beta} (\eta - t)^{\beta}} dt + \int_0^{\eta} B(0,t;\xi,\eta)\psi_2(t)dt, \tag{5}$$

где $B(0,t;\xi,\eta)$ – функция Римана-Адамара задачи Дарбу [1, с. 119],

$$\psi_2(t) = \psi_1(t) + \frac{1}{t}\int_0^{t}\psi_1(\eta)d\eta, \;\; \psi_1(t) = t^{-2\beta}\psi(\frac{t}{2}),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}, \;\; \beta = \frac{m}{2(m+2)}.$$

В формуле (5) полагая $\eta = \xi = x$, получим первое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\tau(x) = \gamma \int_0^{x} (t - x)^{-2\beta} \nu(t)dt + \psi_3(x), \tag{6}$$

где $\psi_3(x) = k\int_0^{x} \frac{t^{2\beta}\psi_2(t)}{x^{\beta}(x-t)^{\beta}} dt, \qquad k = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)}.$

Задача DN. Найти в области D_+ решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u \in C(\overline{D_+}) \cap C^2(D_+);$$

$$\delta_s[u]|_{\Gamma} = \varphi(s), \quad 0 \le s \le l; \;\; u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Лемма 1.1 Пусть функции $\tau(x) \in C[0,1]$, а $\varphi(s) \in C[0,l]$. Тогда существует единственное решение задачи DN и оно определяется формулой

$$u(x,y) = k_1 \int_0^{1} \left\{ \left[(t-x)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} \right]^{-\beta} - \right.$$

$$\left[\left(t+x-2tx\right)^2+\frac{4(2t-1)^2y^{m+2}}{(m+2)^2}\right]^{-\beta}\Bigg\}\tau(t)dt+\int_0^1 H(t,0;x,y)\tau(t)dt+$$

$$+\int_0^l G(\xi,\eta;x,y)\varphi(s)ds, \qquad (7)$$

где $H(\xi,\eta;x,y),G(\xi,\eta;x,y)$ определены в работе [1, с. 83], а $\omega(s)$ – решение интегрального уравнения

$$\omega(s)-\int_0^1 K_2(t,s)\omega(t)dt=2\varphi(s), \qquad (8)$$

$$K_2(s,t)=\delta_s[q_2(\xi(t),\eta(t);x(s),y(s))], \qquad (9)$$

$$q_2(\xi,\eta,x,y)=k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}(r_1^2)^{-\beta}(1-\sigma)^{1-2\beta}F(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;1-\sigma),$$

где $F(\cdot)$ − гипергеометрическая функция Гаусса.

Дифференцируя равенство (7) по y и, полагая $y=0$, получим второе соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$:

$$\nu(x)=\frac{k_1}{1-2\beta}\frac{\partial}{\partial x}\left[-\int_0^x (x-t)^{2\beta-1}\tau(t)dt+\int_x^1 (t-x)^{2\beta-1}\tau(t)dt\right]-$$

$$-k_1\int_0^1\frac{\tau(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}}+\int_0^1\chi(t,x)\tau(t)dt+\Phi(x), \quad 0<x<1, \qquad (10)$$

где

$$\Phi(x)=\int_0^l\omega(s)\frac{\partial q_2(\xi(s),\eta(s);x,0)}{\partial y}ds,$$

$$\chi(t,x)=\frac{\partial^2 H(t,0;x,0)}{\partial y\partial x}=\int_0^l\frac{\partial\lambda(s;t,0)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\delta_s[G_0(\xi,\eta;x,0)]ds.$$

Проблема существования решения задачи типа Неймана будет равносильна вопросу о разрешимости системы уравнений (6) и (10). Исключая $\tau(x)$ из этих уравнений получим сингулярное интегральное уравнение

$$\nu(x)-\lambda\int_0^1\left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{1-2\beta}\left[\frac{1}{\xi-x}-\frac{1}{\xi+x-2\xi x}\right]\nu(\xi)d\xi=$$

$$=f(x)+\lambda\int_0^1 M(x,\xi)\nu(\xi)d\xi, \qquad (11)$$

где

$$\lambda=\frac{cos\pi\beta}{\pi(1+sin\pi\beta)}, \qquad M(x,\xi)=\frac{1-2\beta}{k_1}\int_\xi^1(t-\xi)^{-2\beta}\chi(t,x)dt.$$

$$f(x)=\frac{k_1}{1-2\beta}\left[-\int_0^x(x-t)^{2\beta-1}\psi_{3'}(t)dt+\int_x^1(t-x)^{2\beta-1}\psi_{3'}(t)dt-\right.$$

$$\left.-\psi_3(1)(1-x)^{2\beta-1}-\psi_3(0)x^{2\beta-1}\right]-k_1\int_0^1\frac{\psi_3(t)dt}{(t+x-2tx)^{2-2\beta}}+$$

$$+\int_0^1\chi(t,x)\psi_3(t)dt+\Phi(x), \quad 0<x<1.$$

В результате регуляризации сингулярного уравнения (11), в силу [1, с. 46-49] получим эквивалентное уравнение Фредгольма второго рода, чью разрешимость необходимо установить.

$$\nu(x)-\frac{cos\pi\beta}{2\pi}\int_0^1 K(x,t)\nu(t)dt=F(x),$$

$$K(x,t)=M(x,t)+\lambda\int_0^1\left(\frac{\xi(1-\xi)}{x(1-x)}\right)^{0.5-\beta}\left(\frac{1}{\xi-x}-\frac{1}{\xi+x-2\xi x}\right)M(\xi,t)d\xi,$$

$$F(x)=\frac{1}{1+\pi^2\lambda^2}\left\{f(x)+\lambda\int_0^1\left(\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right)^{0.5-\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2tx}\right)f(t)dt\right\}.$$

Для разрешимости уравнения (11) необходимо установить оценки ядра и правой части. Результаты оценок приведены ниже.

Утверждение 1. 2Пусть $\psi_1(x)=x^{-a}(1-x)^{-b}\psi_0(x)$, где $\psi_0(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $0\le a,b\le 1$.Тогда 1) если $b+\beta\ge 1$ имеем $\psi_3(x)=x^{1-a}(1-x)^{1-b-\beta}\psi_{3,0}(x)$, $\psi_{3,0}(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$; 2)если $b+\beta<1$, то имеют место следующие соотношения $\psi_3(x) = x^{1-a}\psi_{3,0}(x)),$ и $\psi_{3'}(x) = x^{-a}(1-x)^{-b-\beta}\psi_{3,1}(x),\ \psi_{3,1}(x) \in C[0,1].$

Лемма 2. 3 Если решение интегрального уравнения (12) имеет вид $\omega(s) = (1-s)^{\gamma} s^{\alpha}\omega_0(s)(m/2 > \alpha > 0, \gamma > 0),$ где $\omega_0(s)$ непрерывна в малых окрестностях точек A и $B,$ то $\Phi(x)$ бесконечно дифференцируема при $x \in (0,1)$ и в окрестностях точек A и B может обращаться в бесконечность порядка не больше $\frac{2\gamma - m}{m+2}$ и $\frac{2\alpha - m}{m+2}$, соответственно.

Лемма 3. 4 Пусть $\psi(x) = x^{2\beta-1+\varepsilon_1}(1-x)^{\beta-1+\varepsilon_2}\psi_0(x) \quad (\varepsilon_1 > 0,\ \varepsilon_2 \geq 0),$ $\psi_0(x) \in C^3[0,1], \varphi(s) = (1-s)^{\frac{m}{2}-1+\delta_1} s^{\frac{m}{2}-1+\delta_2}\varphi_0(s) \quad (\delta_1 > 0, \delta_2 > 0), \quad \varphi(s) \in C[0,1].$ Тогда справедливо представление $f(x) = (1-x)^{2\beta-1} x^{2\beta-1+\varepsilon_1} f_0(x),\ f_0(x) \in C^2[0,1].$

На основании приведенных выше лемм сформулируем заключительную теорему.

Теорема. Пусть выполнены условия, приведенные в лемме 3. Тогда $F(x) = (1-x)^{2\beta+\varepsilon_1-1} x^{2\beta-1+\varepsilon_2} f_0(x)(\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0),$ где $f_0(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)$ и решение задачи типа Неймана существует.

Список литературы

1. Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. Наука. Москва.1985. 356 с.

2. Сабитов К.Б. К проблеме обобщенной задачи Трикоми, возникшей в теории сопла Лаваля // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 5. С. 841.

3. Сабитов К.Б. К вопросу о существовании решения задачи Трикоми// Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 12. С. 2092.

4. Акимов А.А., Абдуллина Р.И. Решение задачи Дарбу для телеграфного уравнения с отходом от характеристики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2015. №4. С. 29-35.

5.Akimov A., Galiaskarova G. The solution of the Darboux problem for the telegrath equation with deviation from the characteristic // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2015. T. 103. № 2. C. 377-383.

6. Akimov A. On uniqueness Morawetz problem for the Chaplygin equation // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2014. T. 97. № 3. C. 369-375.