УДК 512.12

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВО МНОЖЕСТВЕ КВАТЕРНИОНОВ

Полякова Н.С.

к.ф.-м.н., доцент,

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация

В статье исследуются условия существования корней квадратного уравнения с кватернионными коэффициентами, количество корней в тех случаях, когда они существуют, и выводятся формулы для их вычисления.

Ключевые слова: кватернион, вещественная часть кватерниона, векторная часть кватерниона, мнимые единицы, модуль кватерниона, закон умножения кватернионов, скалярное произведение векторов, векторное произведение.

THE SOLUTION OF QUADRATIC EQUATIONS IN THE SET OF QUATERNIONS

Polyakova N.S.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Annotation

The article investigates the conditions for the existence of the roots of square equation with quaternion coefficients, the number of roots in cases where they exist, and deduces the formulas for their calculation.

Keywords: quaternion, the real part of the quaternion, the vector part of the quaternion, imaginary units, the module of the quaternion, the law of multiplication of quaternions, scalar product of vectors, vector product.

Кватернионы весьма удобны при решении задач, в которых присутствует вращательное движение ([1; 2; 4]. Они являются обобщением комплексных чисел. Комплексные числа получаются из множества действительных чисел добавлением мнимой единицы i со свойством $i^2=-1$, тогда общий вид комплексного числа $z=x+yi$, где x, y – действительные числа. Для алгебраической записи кватерниона используются 3 мнимые единицы:

$$q=q_0+q_1i+q_2j+q_3k\,, \qquad (1)$$

где $q_0,\ q_1,\ q_2,\ q_3$ – действительные числа, $i,\ j,\ k$ – мнимые единицы, которые можно рассматривать также как направляющие векторы координатных осей в трехмерном пространстве. Вектор $\bar{a}=q_1i+q_2j+q_3k$ называется мнимой или векторной частью кватерниона и обозначается $\bar{v}(q)$, а q_0 называется действительной или скалярной частью и обозначается $\operatorname{Re}q$ и кватернион записывается в виде:

$$q=\operatorname{Re}q+\bar{v}(q) \qquad (2)$$

При использовании формы записи для кватернионов $\lambda=\operatorname{Re}\lambda+\bar{v}(\lambda)$, $\mu=\operatorname{Re}\mu+\bar{v}(\mu)$ их произведение может быть записано в виде [2; 7]:

$$\lambda\circ\mu=\operatorname{Re}\lambda\cdot\operatorname{Re}\mu-(\bar{v}(\lambda),\bar{v}(\mu))+\operatorname{Re}\lambda\cdot\bar{v}(\mu)+\operatorname{Re}\mu\cdot\bar{v}(\lambda)+\bar{v}(\lambda)\times\bar{v}(\mu)\,, \qquad (3)$$

где $(\bar{v}(\lambda),\bar{v}(\mu))$ – скалярное произведение [5] векторов $\bar{v}(\lambda)$ и $\bar{v}(\mu)$, а

$\overline{v}(\lambda)\times\overline{v}(\mu)$ – их векторное произведение [3; 5]. Из формулы (3) можно получить, что мнимые единицы *i, j, k* как кватернионы умножаются по правилу векторного умножения векторов за одним исключением:

$$i\circ i = j\circ j = k\circ k = -1,$$

как и положено мнимым единицам. Обычно умножение кватернионов задается с помощью таблицы умножения мнимых единиц и скалярной единицы, а затем по дистрибутивности распространяется на произвольные кватернионы и из этого выводится формула (3) (см., например, [2; 7; 8]). Умножение кватернионов обладает ассоциативностью, дистрибутивностью относительно сложения, но не обладает коммутативностью в общем случае. Из формулы (3) видно, что причина некоммутативности – это векторное произведение векторных частей, которое является антикоммутативным. Однако, если векторные части коллинеарны, то произведение кватернионов будет коммутативным. Из-за некоммутативности формулы сокращенного умножения оказываются неверны, а на них основан вывод формул для решения квадратного уравнения для действительных и комплексных чисел.

Начнем изучение квадратных уравнений с простейшего:

$$q^2 = c\,, \tag{4}$$

где $c = c_0 + \overline{v}(c)$ – заданный кватернион, $q = q_0 + \overline{v}(q)$ – неизвестный кватернион, который надо найти, возведение в квадрат понимается как кватернионное умножение: $q^2 = q\circ q$. Равенство (4) может быть записано в виде:

$$q_0^2 - |\overline{v}(q)|^2 + 2q_0\overline{v}(q) = c_0 + \overline{v}(c),$$

что равносильно системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} q_0^2 - |\overline{v}(q)|^2 = c_0 \\ 2q_0\overline{v}(q) = \overline{v}(c) \end{cases} \tag{5}$$

Если $\overline{v}(c)\neq 0$, тогда $q_0\neq 0$ и $\overline{v}(q)=\dfrac{\overline{v}(c)}{2q_0}$, $q_0^2-\dfrac{|\overline{v}(c)|^2}{4q_0^2}=c_0$. Получаем биквадратное уравнение для q_0: $q_0^4-c_0q_0^2-\dfrac{|\overline{v}(c)|^2}{4}=0$, тогда $(q_0^2)_{12}=\dfrac{c_0\pm\sqrt{c_0^2+|\overline{v}(c)|^2}}{2}=\dfrac{c_0\pm\sqrt{|c|^2}}{2}=\dfrac{c_0\pm|c|}{2}$ и, учитывая, что $q_0^2>0$, получаем 2 корня уравнения (4)

$$q_0=\pm\sqrt{\frac{c_0+|c|}{2}},\quad \overline{v}(q)=\frac{\overline{v}(c)}{2q_0} \tag{6}$$

В алгебраической форме это будет выглядеть так:

$$q=\pm\left(\sqrt{\frac{c_0+\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2}}{2}}+\frac{c_1i+c_2j+c_3k}{\sqrt{2(c_0+\sqrt{c_0^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2})}}\right), \tag{7}$$

где $c=c_0+c_1i+c_2j+c_3k$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\overline{v}(c)=0$, тогда в силу уравнения системы (5) либо $q_0=0$, либо $\overline{v}(q)=0$. Если $\overline{v}(q)=0$, то $q_0^2=c_0$, что возможно только при $c_0\geq 0$, тогда $q=q_0=\pm\sqrt{c_0}=\pm\sqrt{c}$, так как $\overline{v}(c)=0$. Если $c_0<0$, тогда $\overline{v}(q)\neq 0$, следовательно $q_0=0$, а $|\overline{v}(q)|=\sqrt{-c_0}$, то есть получается целая сфера в трехмерном пространстве – бесконечно много решений.

Таким образом, получили теорему.

Теорема 1. Уравнение (4) имеет решения всегда, при этом, если $c=0$, то $q=0$ – единственный корень (кратности 2), если $\overline{v}(c)\neq 0$, то решений ровно 2 и они задаются формулой (6) или (7). Если $\overline{v}(c)=0$, а $c_0>0$, то решений тоже 2: $q=q_0=\pm\sqrt{c_0}=\pm\sqrt{c}$. Если $\overline{v}(c)=0$, но $c_0<0$, то решений бесконечно много, они заполняют целую сферу в трехмерном пространстве, уравнение которой

$q_1^2+q_2^2+q_3^2=-c$ ($c=c_0<0$).

Следствие. Для извлечения корня квадратного из кватерниона c справедливы следующие формулы:

$$\sqrt{c}=\begin{cases}0, & \text{при } c=0\\ \pm\left(\sqrt{\dfrac{c_0+|c|}{2}}+\dfrac{\overline{v}(c)}{\sqrt{2(c_0+|c|)}}\right), & \text{при } \overline{v}(c)\neq 0\\ \pm\sqrt{c_0}, & \text{при } \overline{v}(c)=0,\ c_0>0\\ x_1i+x_2j+x_3k\ \ \forall(x_1,x_2,x_3):\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=-c_0 & \text{при } \overline{v}(c)=0,\ c_0<0\end{cases} \qquad (8)$$

Теперь рассмотрим приведенное квадратное уравнение:

$$z^2+p\circ z+q=0 \qquad (9)$$

Здесь неизвестное обозначено через z, а p, q – заданные коэффициенты.

Пусть $p=p_0+\overline{v}(p),\ q=q_0+\overline{v}(q)$ и $z=z_0+\overline{v}(z)$ – решение уравнения (9), подставим это z в уравнение и, используя формулу (3), получим:

$$z_0^2+2z_0\overline{v}(z)-(\overline{v}(z),\overline{v}(z))+p_0z_0+p_0\overline{v}(z)+z_0\overline{v}(p)-(\overline{v}(p),\overline{v}(z))+\overline{v}(p)\times\overline{v}(z)+q_0+\overline{v}(q)=0,$$

что равносильно системе из двух уравнений:

$$z_0^2-(\overline{v}(z),\overline{v}(z))+p_0z_0-(\overline{v}(z),\overline{v}(p))+q_0=0$$
$$2z_0\overline{v}(z)+p_0\overline{v}(z)+z_0\overline{v}(p)+\overline{v}(p)\times\overline{v}(z)+\overline{v}(q)=0$$

Перепишем второе уравнение в виде:

$$(2z_0+p_0)\overline{v}(z)+z_0\overline{v}(p)+\overline{v}(p)\times\overline{v}(z)+\overline{v}(q)=0 \qquad (10)$$

Если векторное произведение $\overline{v}(p)\times\overline{v}(z)=0$, то векторы $\overline{v}(p)$ и $\overline{v}(z)$ коллинеарны [5; 6], а из уравнения (10) $(2z_0+p_0)\overline{v}(z)+z_0\overline{v}(p)+\overline{v}(q)=0$, значит $\overline{v}(p)$ и $\overline{v}(q)$ коллинеарны, следовательно $z,p,q\in L_e$, где e – единичный направляющий вектор оси, которой параллельны $\overline{v}(p),\ \overline{v}(q),\ \overline{v}(z)$, а L_e – это двумерное подпространство, образованное действительной осью и осью с направляющим вектором е. Умножение двух кватернионов из L_e коммутативно, так как их векторные части коллинеарны, поэтому L_e изоморфно множеству комплексных чисел. Значит, для вычисления корней можно применять известные для комплексных чисел формулы:

$$z_{12} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad (11)$$

Для определения окончательного вида корней можно применить теорему 1.

Если $\overline{v}(p) \times \overline{v}(z) \neq 0$, то так как вектор $\overline{v}(p) \times \overline{v}(z)$ ортогонален векторам $\overline{v}(p)$ и $\overline{v}(z)$, то по уравнению (10) $\overline{v}(p) \times \overline{v}(z) + \overline{v}(q) = 0$, а значит $(2z_0 + p_0)\overline{v}(z) + z_0\overline{v}(p) = 0$, откуда следует, что либо векторы $\overline{v}(p)$ и $\overline{v}(z)$ коллинеарны, а следовательно $\overline{v}(p) \times \overline{v}(z) = 0$ – противоречие, либо $p_0 = z_0 = 0$, тогда получится следующая система ограничений:

$$\begin{cases} (\overline{v}(z), \overline{v}(z)) + (\overline{v}(z), \overline{v}(p)) = q_0 \\ \overline{v}(p) \times \overline{v}(z) = -\overline{v}(q) \neq 0 \\ z_0 = p_0 = 0 \end{cases}. \qquad (12)$$

Первое уравнение системы (12) можно переписать в виде $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + p_1 z_1 + p_2 z_2 + p_3 z_3 = q_0$ или

$$(z_1 + \frac{p_1}{2})^2 + (z_2 + \frac{p_2}{2})^2 + (z_3 + \frac{p_3}{2})^2 = q_0 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{4}. \qquad (13)$$

Уравнение (13) имеет решения только при $q_0 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{4} \geq 0$, так как это квадрат радиуса окружности. Обозначим этот радиус через *r*, тогда $r^2 = q_0 + \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{4}$. Если $r = 0$, то $\overline{v}(z) = -\overline{v}(p)/2$, тогда не выполняется второе условие системы (12), следовательно $r > 0$. По свойствам векторного произведения [3; 7] $\overline{v}(p)$ и $\overline{v}(q)$ должны быть ортогональны и второе уравнение системы (12) дает следующее:

$$\begin{aligned} p_3 z_2 - p_2 z_3 &= q_1 \\ p_1 z_3 - p_3 z_1 &= q_2\,, \\ p_2 z_1 - p_1 z_2 &= q_3 \end{aligned} \qquad (14)$$

Уравнения системы (14) совместны, так как p и $\bar{v}(q)$ ортогональны, но линейно зависимы [6], однако позволяют выразить $z_2,\ z_3$ чрез z_1: $z_2 = \frac{p_2}{p_1} z_1 - \frac{q_3}{p_1}$, $z_3 = \frac{p_3}{p_1} z_1 + \frac{q_2}{p_1}$ при $p_1 \neq 0$. Подставим это в уравнение (13) и после преобразований с использованием формул для векторного и скалярного умножения [7] получим

$$z_1 = \frac{-p_1 |p|^2 + 2p_2 q_3 - 2p_3 q_2 \pm p_1 \sqrt{|p|^2 (|p|^2 + 4q_0) - 4|\bar{v}(q)|^2}}{2|p|^2} =$$

$$= \frac{-p_1 |p|^2 + 2p_2 q_3 - 2p_3 q_2 \pm 2p_1 \sqrt{r^2 |p|^2 - |\bar{v}(q)|^2}}{2|p|^2}, \qquad (15)$$

$$z_2 = \frac{-p_2 |p|^2 + 2p_3 q_1 - 2p_1 q_3 \pm 2p_2 \sqrt{r^2 |p|^2 - |\bar{v}(q)|^2}}{2|p|^2}, \qquad (16)$$

$$z_3 = \frac{-p_3 |p|^2 + 2p_1 q_2 - 2p_2 q_1 \pm 2p_3 \sqrt{r^2 |p|^2 - |\bar{v}(q)|^2}}{2|p|^2}. \qquad (17)$$

Здесь $p = p_1 i + p_2 j + p_3 k$, поэтому $|p| = |\bar{v}(p)|$. Из формул (15)-(17) получаем

$$z = -\frac{p}{2} + \frac{p \times \bar{v}(q)}{|p|^2} + \frac{p}{|p|^2} \sqrt{(q_0 + \frac{|p|^2}{4})|p|^2 - |\bar{v}(q)|^2}\,.$$

Если $p_1 = 0$, но $p_2 \neq 0$, по формулам (14) можно выразить $z_1,\ z_3$ через z_2 и подставить в уравнение (13) и получить формулы (15)-(17). Если $p_3 \neq 0$, $z_1,\ z_2$ выражаются через z_3. Условие существования корней: $r^2 |p|^2 - |\bar{v}(q)|^2 \geq 0$ или $|\bar{v}(q)| \leq |p| r$, что равносильно

$$|\bar{v}(q)| \leq |p| \sqrt{q_0 + |p|^2 / 4} \qquad (18)$$

Таким образом, мы получили следующее утверждение.

Теорема 2. Если $\overline{v}(p)$ и $\overline{v}(q)$ коллинеарны, то корни уравнения (9) можно найти по формуле (11), при этом, обозначив $d = p^2 - 4q$ – дискриминант уравнения (9), получим:

$$z = \begin{cases} 0, & \text{при } d = 0 \\ -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{d_0 + |d|}{2}} + \dfrac{\overline{v}(d)}{\sqrt{2(d_0 + |d|)}}\right), & \text{при } \overline{v}(d) \neq 0 \\ -\dfrac{p}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{d_0}, & \text{при } \overline{v}(d) = 0,\ d_0 > 0 \\ -\dfrac{p}{2} + \dfrac{1}{2}(x_1 i + x_2 j + x_3 k)\ \ \forall (x_1, x_2, x_3):\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -d_0 & \text{при } \overline{v}(d) = 0,\ d_0 < 0 \end{cases}, \tag{19}$$

то есть, при $d = 0$ уравнение имеет единственный корень $z = -\frac{p}{2}$ кратности 2, при $\overline{v}(d) \neq 0$ ровно 2 решения, при $\overline{v}(d) = 0,\ d = d_0 > 0$, тоже только 2 решения, при $\overline{v}(d) = 0,\ d = d_0 < 0$, бесконечно много корней.

Если векторные части кватернионов p и q ортогональны, $p_0 = 0$, $\overline{v}(p) \neq 0$, $\overline{v}(q) \neq 0$, $4q_0 + |\overline{v}(p)|^2 > 0$ и $|\overline{v}(q)| \leq |p| \sqrt{q_0 + |\overline{v}(p)|^2/4}$, то решения также существуют и могут быть найдены по формуле:

$$z = -\frac{p}{2} + \frac{p \times \overline{v}(q)}{|p|^2} + \frac{p}{|p|^2}\sqrt{(q_0 + \frac{|p|^2}{4})|p|^2 - |\overline{v}(q)|^2} \tag{20}$$

Здесь также при $|\overline{v}(q)| = |p| \sqrt{q_0 + |\overline{v}(p)|^2/4}$ одно решение, при $|\overline{v}(q)| < |p| \sqrt{q_0 + |\overline{v}(p)|^2/4}$ два решения.

В остальных случаях уравнение (9) не имеет решений.

Формулы (19) получены из формул (8).

Замечание. Очевидно, если уравнение записано в виде

$$z^2 + z \circ p + q = 0,$$

то в уравнении (10) меняется только знак векторного произведения. Поэтому теорема 2 справедлива и в этом случае, в формуле (20) меняется знак векторного произведения.

Рассмотрим неприведенное уравнение:

$$a \circ z^2 + b \circ z + c = 0 \tag{21}$$

Уравнение (21) равносильно уравнению

$$z^2 + a^{-1} \circ b \circ z + a^{-1} \circ c = 0 \tag{22}$$

По теореме 2 векторные части кватернионов $a^{-1}b$ и $a^{-1}c$ должны быть либо пропорциональны, либо ортогональны. Рассмотрим случай пропорциональности. Так как $a^{-1} = \frac{1}{|a|^2}(a - \overline{v}(a))$ [8; 9], то

$a^{-1}b = \frac{1}{|a|^2}(a_0 b_0 + (\overline{v}(a), \overline{v}(b)) + a_0 \overline{v}(b) - b_0 \overline{v}(a) + \overline{v}(b) \times \overline{v}(a))$,

$a^{-1}c = \frac{1}{|a|^2}(a_0 c_0 + (\overline{v}(a), \overline{v}(c)) + a_0 \overline{v}(c) - c_0 \overline{v}(a) + \overline{v}(c) \times \overline{v}(a))$, тогда коллинеарность векторных частей дает нам равенство:

$$a_0 \overline{v}(b) - b_0 \overline{v}(a) + \overline{v}(b) \times \overline{v}(a) - k a_0 \overline{v}(c) + k c_0 \overline{v}(a) - k \overline{v}(c) \times \overline{v}(a) = 0, \tag{23}$$

где *к* – некоторое действительное число.

Преобразуем уравнение (23) к виду:

$$a_0(\overline{v}(b) - k\overline{v}(c)) - (b_0 - k c_0)\overline{v}(a) + (\overline{v}(b) - k\overline{v}(c)) \times \overline{v}(a) = 0. \tag{24}$$

Так как векторное произведение $(\overline{v}(b) - k\overline{v}(c)) \times \overline{v}(a)$ ортогонально векторам $\overline{v}(b) - k\overline{v}(c)$ и $\overline{v}(a)$, то оно должно быть равно нулю. Тогда либо $\overline{v}(a) = 0$, либо $\overline{v}(b) - k\overline{v}(c) = 0$, либо векторы $\overline{v}(b) - k\overline{v}(c)$ и $\overline{v}(a)$ коллинеарны.

Если $\overline{v}(a) = 0$, тогда $a_0 \neq 0$ и из уравнения (23) получаем, что $\overline{v}(b) = k\overline{v}(c)$, то есть векторы $\overline{v}(b)$ и $\overline{v}(c)$ коллинеарны. Если $\overline{v}(a) \neq 0$, но $\overline{v}(b) = k\overline{v}(c)$, тогда из уравнения (23) $b_0 = kc_0$, следовательно $b = kc$. Если векторы $\bar{v}(b) - k\bar{v}(c)$ и $\bar{v}(a)$ коллинеарны, из уравнения (24) $\bar{v}(a) = \dfrac{a_0}{b_0 - kc_0}\bar{v}(b) - \dfrac{a_0 k}{b_0 - kc_0}\bar{v}(c)$, значит существуют действительные k_1 и k_2 такие, что $\bar{v}(a) = k_1\bar{v}(b) + k_2\bar{v}(c)$, где

$\begin{cases} k_1 = \dfrac{a_0}{b_0 - kc_0} \\ k_2 = \dfrac{a_0 k}{kc_0 - b_0} \end{cases}$, тогда $k = \dfrac{k_1 b_0 - a_0}{k_1 c_0} = \dfrac{k_2 b_0}{k_2 c_0 - a_0}$, отсюда $k_1 k_2 b_0 c_0 = k_1 k_2 b_0 c_0 - a_0(k_1 b_0 + k_2 c_0) + a_0^2$,

следовательно $a_0 = k_1 b_0 + k_2 c_0$, значит $a = k_1 b + k_2 c$.

Если $\bar{v}(a^{-1} \circ b)$ и $\bar{v}(a^{-1} \circ c)$ ненулевые ортогональные векторы, $\mathrm{Re}(a^{-1} \circ b) = 0$ и $|\bar{v}(a^{-1} \circ b)|^2 (\mathrm{Re}(a^{-1} \circ c) + |\bar{v}(a^{-1} \circ b)|^2 /4) \geq |\bar{v}(a^{-1} \circ c)|^2$, то решения также существуют.

Получили следующее утверждение.

Теорема 3. Уравнение (21) имеет решения в следующих случаях:

1) если $\bar{v}(a) = 0$, векторы $\bar{v}(b)$ и $\bar{v}(c)$ коллинеарны,
2) если $\bar{v}(a) = 0$, векторы $\bar{v}(b)$ и $\bar{v}(c)$ ортогональны, $b_0 = 0$, $\bar{v}(b) \neq 0$, $\bar{v}(c) \neq 0$, $4c_0 a_0 + |\bar{v}(b)|^2 > 0$ и $|a_0 \bar{v}(c)| \leq |\bar{v}(b)| \sqrt{a_0 c_0 + |\bar{v}(b)|^2 /4}$,
3) если кватернионы b и c пропорциональны ($b = kc,\ k \in \mathbb{R}$), то a может быть любым не равным нулю;
4) $a = k_1 b + k_2 c$ – кватернион a является линейной комбинацией с действительными коэффициентами кватернионов b и c,
5) если $\bar{v}(a^{-1} \circ b)$ и $\bar{v}(a^{-1} \circ c)$ ненулевые ортогональные векторы, $\mathrm{Re}(a^{-1} \circ b) = 0$ и $|\bar{v}(a^{-1} \circ b)|^2 (\mathrm{Re}(a^{-1} \circ c) + |\bar{v}(a^{-1} \circ b)|^2 /4) \geq |\bar{v}(a^{-1} \circ c)|^2$.

Если выполнено одно из условий 1), 3) или 4,) корни уравнения могут быть найдены по формуле:

$$z = -\frac{a^{-1} \circ b}{2} \pm \frac{\sqrt{a^{-1} \circ b \circ a^{-1} \circ b - 4a^{-1} \circ c}}{2} \qquad (25)$$

Здесь также, если $a^{-1}\circ b\circ a^{-1}\circ b-4a^{-1}\circ c=d_0\in\mathbb{R}$ и $d_0<0$, то решений не 2, а бесконечно много.

Если выполнено условие 2),

$$z=-\frac{b}{2a_0}+\frac{b\times\overline{v}(c)}{|b|^2}+\frac{b}{a_0|b|^2}\sqrt{(c_0a_0+\frac{|b|^2}{4})|b|^2-|a_0\overline{v}(c)|^2} \qquad (26)$$

Если выполнены условия 5), то $\overline{v}(a^{-1}\circ b)=a^{-1}\circ b$, так как это чисто векторный кватернион и

$$z=-\frac{a^{-1}\circ b}{2}+\frac{(a^{-1}\circ b)\times\overline{v}(a^{-1}\circ c)}{|a^{-1}\circ b|^2}\pm$$

$$\pm\frac{a^{-1}\circ b}{|a^{-1}\circ b|^2}\sqrt{(\mathrm{Re}(a^{-1}\circ c)+\frac{|a^{-1}\circ b|^2}{4})|a^{-1}\circ b|^2-|\overline{v}(a^{-1}\circ c)|^2} \qquad (27)$$

Если ни одно из условий 1)-5) не выполняется, то уравнение (21) решений не имеет.

Таким образом, уравнение вида

$$a\circ z^2+b\circ z+c=0$$

полностью исследовано. Для уравнений

$$z^2\circ a+z\circ b+c=0$$

условия существования решений аналогичны условиям для уравнения (21), формула для вычисления корней для случаев 1), 3), 4) имеет вид:

$$z=-\frac{b\circ a^{-1}}{2}\pm\frac{\sqrt{b\circ a^{-1}\circ b\circ a^{-1}-4c\circ a^{-1}}}{2}.$$

В случае выполнения условия 2) или 5) в формулах (26), (27) меняется знак векторного произведения.

При исследовании пространства кватернионов возникают и другого вида квадратные уравнения:

$$z \circ a \circ z^* + z \circ b + c \circ z^* = d \,,$$

где *a, b, c, d* – кватернионные коэффициенты, $z^* = z_0 - \overline{v}(z)$ – сопряженное к *z*. С их решением можно ознакомиться в работе [10].

Библиографический список

1. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела /Н.И. Амелькин // Москва, МФТИ, 2000, 65с.
2. Бранец А. В., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела /А.В. Бранец, И.П. Шмыглевский // Москва, Наука, 1973, 320 с.
3. Димитриенко Ю.И. Тензорный анализ / Ю.И. Димитриенко // Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 463 с.
4. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики /В.Ф. Журавлев // Москва, Физматлит, 2001, 320с.
5. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия /А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000, 388с.
6. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра /А.Н. Канатников, А.П. Крищенко // Москва, Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002, 325с.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии /Д.В. Клетеник // Москва, Наука, Физматлит, 1998, 240 с.
8. Полякова Н. С., Дерябина Г. С., Кватернионы и их применение /Н.С. Полякова, Г.С. Дерябина // Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003, 56 с.
9. Полякова Н. С., Дерябина Г. С., Гиперкомплексные числа /Н.С. Полякова, Г.С. Дерябина // Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017, 72 с.
10. Farouki R.T., Gentili G., Giannelli C., Sestini A., Stoppato C. Solution of a quadratic quaternion equation with mixed coefficients // J. of Symbolic Computation, 2016, vol. 74, p.p.140-151.

Оригинальность 98%