УДК 372.851

АЛГОРИТМЫ ВЫПОЛНЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ НАД НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ И НАД МНОГОЧЛЕНАМИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Гриншпон Я.С.

к.ф.-м.н., доцент,

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Томск, Россия

Лапатин А.Л.

магистрант,

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Томск, Россия

Аннотация. Обоснована возможность выполнения арифметических действий над многочленами от одной переменной по стандартным алгоритмам выполнения действий над натуральными числами: сложение, вычитание и умножение «в столбик», деление «уголком». Показана актуальность изучения в средней школе поразрядной записи натуральных чисел в позиционных системах счисления с точки зрения теории многочленов.

Ключевые слова: методика преподавания математики, позиционные системы счисления, многочлены от одной переменной.

ALGORITHMS TO PERFORM ARITHMETIC WITH NATURAL NUMBERS AND POLYNOMIALS IN SINGLE VARIABLE IN THE MATHEMATICAL SCHOOL CURRICULUM

Grinshpon Ya.S.

PhD, Associate Professor,

National Research Tomsk state university,

Tomsk, Russia

Lapatin A.L.

master

National Research Tomsk state university,
Tomsk, Russia
Abstract. The article proves the possibility of performing arithmetic with polynomials in single variable by using standard algorithms to perform arithmetic with natural numbers: addition, subtraction and multiplication in columns, long division. It is shown the relevance of studying digit order in positional numeral systems from the point of view of polynomial theory at secondary school.
Keywords: methods of teaching mathematics, positional numeral systems, polynomials in single variable.

Натуральное число – это, безусловно, наиболее востребованный математический объект в повседневной деятельности любого человека. Умение правильно оперировать натуральными числами (записывать числа в десятичной системе счисления, сравнивать их, выполнять арифметические действия) является столь же необходимым для современного человека, как умение четко выражать свои мысли или контролировать свои биологические потребности.

Знакомство с натуральными числами происходит еще в дошкольный этап развития ребенка. В начальной школе понятие натурального числа вводится более системно, изучаются поразрядная запись числа, сравнение чисел и арифметические действия над ними. Большое внимание уделяется отработке навыка выполнения арифметических действий с помощью специальных алгоритмов (сложение, вычитание и умножение «в столбик», деление «уголком»). Освоение школьниками этих алгоритмов позволяет им достаточно быстро и эффективно получать верный вычислительный результат.

При изучении данных алгоритмов в начальной школе, как правило, не затрагивается вопрос о том, на чем основаны эти способы вычислений. Методически такой подход можно признать оправданным, так как большинству младших школьников трудно проводить рассуждения общего характера, и поэтому попытка строгого логического обоснования алгоритмов скорее всего не найдет отклика у детей.

При переходе же в среднее звено, ученики сталкиваются с тем, что учителя математики считают вопросы арифметики натуральных чисел уже пройденным этапом, и вычислительные навыки при этом являются лишь инструментом, необходимым для решения более сложных задач. Поэтому в средней и старшей школе проблема обоснования алгоритмов выполнения арифметических действий также, как правило, не обсуждается.

Отметим, что способ сложения и вычитания «в столбик» интуитивно понятен учащимся любого возраста как поразрядное сложение и вычитание. Понимания же смысла умножения «в столбик» и, тем более, деления «уголком» нет не только у младших школьников, но и учеников старших классов.

Однако понимание позиционной записи натурального числа как суммы разрядных слагаемых и, как следствие, обоснование алгоритмов арифметических действий над натуральными числами могут стать основой для выработки удобных алгоритмов действий над многочленами от одной переменной. Так как теория многочленов занимает значительную часть курса алгебры средней школы, то авторам представляется актуальным в 7-8 классах вернуться к арифметике натуральных чисел и обосновать стандартные вычислительные алгоритмы для их дальнейшего обобщения на многочлены.

Арифметические действия над натуральными числами.

Под записью $A = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_{n\ (p)}$ (1), где $0 \leq a_{1,} a_2, \dots, a_n < p$, $a_1 \neq 0$, $a_1, a_2, \dots, a_n$ – целые числа, p – натуральное число, $p \neq 1$, понимают число, равное $A = a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot p^1 + a_n \cdot p^0$ (2).

Символы, обозначающие числа $a_{1,} a_2, \dots, a_n$, называют цифрами. Число n – количество слагаемых в сумме (2) и количество цифр в записи (1). Число p называют основанием позиционной записи числа или основанием позиционной системы счисления. Выражение (2) называют суммой разрядных слагаемых числа A. К сумме разрядных слагаемых можно относится как к значению многочлена $f(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ в точке $x = p$.

<u>Замечание.</u> При записи чисел в позиционной системе с основанием 10 принято основание не указывать: $1893_{(10)} = 1893$.

Сложение и вычитание.

Пример 1. Найдем сумму чисел 2672 и 304.

$2672 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$

$304 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 4$

$$2672 + 304 = (2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2\,) + (3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 4)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{воспользуемся ассоциативностью и коммутативностью сложения,} \\ \text{а так же дистрибутивностью умножения относительно сложения} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \cdot 10^3 + (6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^2) + (7 \cdot 10 + 0 \cdot 10) + (2 + 4)$$

$$= \mathbf{2} \cdot 10^3 + \mathbf{9} \cdot 10^2 + \mathbf{7} \cdot 10 + \mathbf{6} = 2976$$

Коротко пишут так:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 2672 \\ 304 \end{array} \\ \hline 2976 \end{array}$$

Пример 2. Найдем сумму чисел $2672_{(8)}$ и $304_{(8)}$.

Аналогично примеру 1: $2672_{(8)} + \ 304_{(8)} = \mathbf{2} \cdot 8^3 + \mathbf{9} \cdot 8^2 + \mathbf{7} \cdot 8 + \mathbf{6}$.

Однако мы не можем эту сумму считать суммой разрядных слагаемых, так как цифры должны быть меньше основания позиционной записи, в данном случае меньше 8. Второе слагаемое, коэффициент которого нас не устраивает, запишем в виде суммы

$$\mathbf{9} \cdot 8^2 = (\mathbf{8} + \mathbf{1}) \cdot 8^2 = \mathbf{8} \cdot 8^2 + \mathbf{1} \cdot 8^2 = \mathbf{1} \cdot 8^3 + \mathbf{1} \cdot 8^2$$

Тогда

$$2672_{(8)} + \ 304_{(8)} = (\mathbf{2} \cdot 8^3 + \mathbf{1} \cdot 8^3) + \mathbf{1} \cdot 8^2 + \mathbf{7} \cdot 8 + \mathbf{6}$$

$$= \mathbf{3} \cdot 8^3 + \mathbf{1} \cdot 8^2 + \mathbf{7} \cdot 8 + \mathbf{6} = \mathbf{3176}_{(8)}$$

Или

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}672_{(8)} \\ + \ \ 304_{(8)} \\ \hline \mathbf{3176}_{(8)} \end{array}$$

В этом примере мы рассмотрели механизм перехода единицы в старший разряд при сложении «в столбик». Аналогично не сложно обосновать механизм занимания единицы у старшего разряда при вычитании.

Пример 3. Найдем разность чисел $2672_{(8)}$ и $304_{(8)}$.

$$
\begin{aligned}
2672_{(8)} - 304_{(8)} &= (\mathbf{2}\cdot 8^3 + \mathbf{6}\cdot 8^2 + \mathbf{7}\cdot 8 + \mathbf{2}) - (\mathbf{3}\cdot 8^2 + \mathbf{0}\cdot 8 + \mathbf{4}) \\
&= \mathbf{2}\cdot 8^3 + (\mathbf{6}\cdot 8^2 - \mathbf{3}\cdot 8^2) + (\mathbf{7}\cdot 8 - \mathbf{0}\cdot 8) + (\mathbf{2} - \mathbf{4}) \\
&= \mathbf{2}\cdot 8^3 + \mathbf{3}\cdot 8^2 + \mathbf{7}\cdot 8 + (-\mathbf{2}) \\
&= \mathbf{2}\cdot 8^3 + \mathbf{3}\cdot 8^2 + (\mathbf{6} + \mathbf{1})\cdot 8 + (-\mathbf{2}) \\
&= \mathbf{2}\cdot 8^3 + \mathbf{3}\cdot 8^2 + \mathbf{6}\cdot 8 + \mathbf{1}\cdot 8 + (-\mathbf{2}) = \mathbf{2}\cdot 8^3 + \mathbf{3}\cdot 8^2 + \mathbf{6}\cdot 8 + \mathbf{6} \\
&= \mathbf{2366}_{(8)}
\end{aligned}
$$

Или

$$
\begin{array}{r}
26\dot{7}2_{(8)} \\
-\ \ 304_{(8)} \\
\hline
\mathbf{2366}_{(8)}
\end{array}
$$

Подобные примеры, несмотря на их очевидность для профессионального математика, очень полезны для школьников 7-8 классов, так как формируют у них отношение к позиционной записи натурального числа, как к сумме разрядных слагаемых, и тем самым иллюстрируют взаимосвязь механизмов действий над числами и над многочленами. Следует так же заметить, что примеры на действия с числами, записанными в недесятичной форме, помогают развеять стереотип о том, что давно знакомые алгоритмы придуманы специально для привычной десятичной записи натуральных чисел. Оказывается, они остаются верными и для других позиционных систем счисления (в частности, они применимы для важных в информатике двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления).

Пример 4. Найдем сумму чисел $2672_{(x)}$ и $304_{(x)}$.

Используя те же принципы, которые работали в предыдущих примерах, получаем сумму

$$2672_{(x)} + 304_{(x)} = \mathbf{2}\cdot x^3 + \mathbf{9}\cdot x^2 + \mathbf{7}\cdot x + \mathbf{6}$$

Или

$$
\begin{array}{rr}
 & \mathbf{2}x^3 + \mathbf{6}x^2 + \mathbf{7}x + \mathbf{2} \\
+ & \mathbf{3}x^2 + \mathbf{0}x + \mathbf{4} \\
\hline
 & \mathbf{2}x^3 + \mathbf{9}x^2 + \mathbf{7}x + \mathbf{6}
\end{array}
$$

Конечно, в контексте этой задачи мы должны понимать, что x принимает только натуральные значения больше семи. Так же необходимо уточнить, что не все коэффициенты последней суммы могут быть цифрами в позиционной записи натурального числа, являющегося результатом сложения. Но можно с уверенностью утверждать, что сумма данных чисел будет равна значению последнего многочлена при заданном допустимом значении основания x.

Выходя же за рамки условия примера 4, мы получаем удобный способ сложения многочленов от одной переменной. А так как на коэффициенты многочлена не накладываются ограничения, связанные со множеством допустимых значений цифр в позиционной записи числа, то алгоритм сложения и вычитания многочленов становится даже проще алгоритма сложения и вычитания натуральных чисел, а именно, он не содержит правил перехода единицы в старший разряд при сложении и занимания единицы у старшего разряда при вычитании.

Пример 5. Найти разность многочленов $5x^3 - 2x^2 + x - 6$ и $3x^4 + x^2 + x - 7$.

1 способ (традиционный).

$$(5x^3 - 2x^2 + x - 6) - (3x^4 + x^2 + x - 7) = 5x^3 - 2x^2 + x \underline{-6} - 3x^4 - x^2 - x \underline{+7}$$
$$= -3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 1$$

2 способ («в столбик»).

$$\begin{array}{r} - \quad 5x^3 - 2x^2 + 1x - 6 \\ 3x^4 + 0x^3 + 1x^2 + 1x - 7 \\ \hline -3x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 0x + 1 \end{array}$$

Следует заметить, что для получения такого метода сложения и вычитания многочленов можно было и не рассматривать аналогию с натуральными числами. Достаточно сказать, что для более удобного приведения подобных слагаемых запишем многочлены так, чтобы подобные оказывались одно под другим. Однако ценность всех приведенных выше рассуждений заключается не столько в предъявлении метода, сколько в самостоятельном получении этого метода самими учащимися. Кроме того, возникает естественный вопрос о возможности переноса алгоритмов умножения и деления натуральных чисел на случай с многочленами.

Умножение.

Пример 6. Вычислить $342 \cdot 51$.

Используя привычный алгоритм умножения натуральных чисел «в столбик», получаем

$$\begin{array}{r} \times \quad 342 \\ 51 \\ \hline 342 \\ + \; 1710 \\ \hline 17442 \end{array}$$

Умножение «в столбик» является краткой записью таких рассуждений:

$$342 \cdot 51 = (300 + 40 + 2) \cdot (50 + 1) = (2 \cdot 1 + 40 \cdot 1 + 300 \cdot 1) + \\ +(2 \cdot 50 + 40 \cdot 50 + 300 \cdot 50) = 342 + 17100 = 17442 \qquad (4)$$

или $342 \cdot 51 = 342 \cdot 1 + 342 \cdot 50 = 342 + (342 \cdot 5) \cdot 10 = 342 + 1710 \cdot 10 = 17442$

Здесь используем дистрибутивность умножения относительно сложения. Механизм при внимательном рассмотрении прозрачен. Чтобы не загромождать запись, вместо 17100 записывается 1710, но со сдвигом по разрядной шкале на одну цифру влево, что по факту является умножением на 10.

Можно ли этот алгоритм использовать для умножения многочленов? Преобразования (4) полностью отражают правило умножения многочлена на многочлен. Произведение двух многочленов равно многочлену, членами которого являются произведения каждого члена одного многочлена на каждый член другого многочлена [1, 99].

Пример 7. Преобразуйте выражение $(5 - 2a + a^2)(4a^2 - 3a - 1)$ в многочлен стандартного вида [2, 124].

1 способ.

$$(5 - 2a + a^2)(4a^2 - 3a - 1) \\ = 20a^2 - 8a^3 + 4a^4 - 15a + 6a^2 - 3a^3 - 5 + 2a - a^2 \\ = 4a^4 - 11a^3 + 25a^2 - 13a - 5$$

2 способ.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 1a^2 - \ 2a + \ 5 \\ \underline{4a^2 - \ 3a - \ 1} \end{array} \\ -\ 1a^2 + \ 2a - \ 5 \\ -\ 3a^3 + \ 6a^2 - 15a \qquad\quad \\ \underline{4a^4 - \ 8a^3 + 20a^2 \qquad\qquad\qquad} \\ 4a^4 - 11a^3 + 25a^2 - 13a - 5 \end{array}$$

При решении задачи обоими способами осуществляются одни и те же операции – умножение каждого слагаемого первой суммы на каждое слагаемое второй суммы с последующим приведением подобных слагаемых. Однако очевидно, что второй способ удобнее.

Заметим, что при умножении натуральных чисел в примере 6 нам, как и в сложении, приходилось беспокоиться о переносе единицы в старший разряд в силу ограниченности набора цифр. При умножении многочленов «в столбик» такой надобности нет, так как коэффициенты многочлена могут принимать любые действительные значения.

<u>Пример 8</u>. Произведение чисел $21_{(x)}$ и $31_{(x)}$ равно 247. По какому основанию записаны данные числа? Запишите эти числа в десятичной форме.

Пусть x – основание, тогда $21_{(x)} = 2x + 1$, $31_{(x)} = 3x + 1$.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 2x + 1 \\ \underline{3x + 1} \end{array} \\ + \begin{array}{r} 2x + 1 \\ \underline{6x^2 + 3x \qquad} \end{array} \\ 6x^2 + 5x + 1 \end{array}$$

Получаем уравнение $6x^2 + 5x + 1 = 247$, корни которого 6 и $-\frac{41}{6}$. Основанием позиционной записи может быть только натуральное число, не равное 1. Значит, основание 6, данные числа 13 и 19.

В примере 8 числа рассматриваются как многочлены от одной переменной. Причем результат арифметического действия над ними многочлен, коэффициенты которого не являются цифрами позиционной записи. Но это и не нужно, так как здесь важно только значение этого многочлена, которое дано в условии задачи.

Деление.

Больше всего вопросов вызывает деление «уголком». Как это работает?

Пример 9. Найти частное от деления 735324 на 12.

```
735324   12
72       -----
         61277
 15
 12
  33
  24
   92
   84
    84
    84
     0
```

Результат деления – число 61277.

Этот алгоритм построен на дистрибутивности деления относительно сложения. А именно

$$(a+b+c+\cdots+n):r=a:r+b:r+c:r+\cdots+n:r, \quad r\neq 0 \qquad (5)$$

Делимое раскладывается на слагаемые, каждое из которых кратно делителю, в нашем случае

$$735324=\mathbf{72}0000+\mathbf{12}000+\mathbf{24}00+\mathbf{84}0+\mathbf{84}.$$

Эти слагаемые формируется из цифр делимого последовательно, начиная со старшего разряда. Выделяется группа цифр, которая больше делителя, фиксируется неполное частное от деления этой группы цифр на делитель, после чего находится остаток от деления, к которому добавляется следующая цифра, и с ним проводятся те же операции. И так до тех пор, пока остаток не станет меньше делителя, после чего все неполные частные складываются. Если остаток оказался равен нулю, то говорят, что произошло деление без остатка, или деление нацело.

В качестве слагаемых разложения выступают фактически произведения неполных частных на делитель, или, другими словами, наибольшие кратные делителя, не превосходящие выделенной группы цифр.

Первое слагаемое разложения – это не 72, как записано при делении «уголком», а 720000. Это видно по позициям, которые занимают цифры 7 и 2. Нули не пишутся, чтобы не загромождать запись.

В итоге имеем

$$735324 : 12 = \mathbf{72}0000 : 12 + \mathbf{12}000 : 12 + \mathbf{24}00 : 12 + \mathbf{84}0 : 12 + \mathbf{84} : 12 =$$
$$= \mathbf{6}0000 + \mathbf{1}000 + \mathbf{2}00 + \mathbf{7}0 + \mathbf{7} = 61277$$

$$\begin{array}{rcr} 720000 & :12 = & 60000 \\ 12000 & :12 = & 1000 \\ +\quad 2400 & :12 = & +\quad 200 \\ 840 & :12 = & 70 \\ 84 & :12 = & 7 \\ \hline 735324 & & 61277 \end{array}$$

Будет ли этот алгоритм корректно выполняться при делении многочлена на многочлен от одной переменной?

Если получится представить многочлен-делимое в виде суммы таких многочленов, каждый из которых при делении на многочлен-делитель будет давать одночлен, то будет выполняться равенство (5), в результате чего в частном будет сумма одночленов, то есть многочлен-частное.

Подбор слагаемых происходит по той же схеме, что и при делении натуральных чисел, только вместо старших разрядов числа рассматриваются старшие степени многочлена. По сути подбирается результат деления части делимого на делитель, после чего эта часть просто вычисляется умножением.

<u>Пример 10</u>. Разделить $x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70$ на $x^2 + x - 2$.

Самый «большой» одночлен, который может быть результатом деления какой-то части делимого на делитель, легко подбирается по старшим членам делимого и делителя. Это $\boldsymbol{x^2}$. (Конечно, «большой» рассматривается с точки зрения показателя степени переменной и абсолютной величины коэффициента, чтобы степень остатка была меньше степени делимого).

$$(x^2 + x - 2) \cdot \boldsymbol{x^2} = x^4 + x^3 - 2x^2$$

$$(x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70) - (x^4 + x^3 - 2x^2)$$
$$= 2x^3 - 33x^2 - 39x + 70 - \text{первый остаток}$$

Дальше подбираем по той же схеме «наибольший» одночлен для остатка. Это $\boldsymbol{2x}$.

$$(x^2 + x - 2) \cdot \boldsymbol{2x} = 2x^3 + 2x^2 - 4$$

$$(2x^3 - 33x^2 - 39x + 70) - (2x^3 + 2x^2 - 4x)$$
$$= -35x^2 - 35x + 70 - \text{второй остаток}$$

Дальше имеем

$$(x^2 + x - 2) \cdot (\boldsymbol{-35}) = -35x^2 - 35x + 70$$

$$(-35x^2 - 35x + 70) - (-35x^2 - 35x + 70) = 0 - \text{последний остаток.}$$

Складываем выделенные одночлены и получаем искомое частное $\boldsymbol{x^2 + 2x - 35}$.

Сделаем более компактную запись этих рассуждений

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3 - 2x^2} \phantom{{}- 39x + 70} & \boldsymbol{x^2 + 2x - 35} \\
2x^3 - 33x^2 - 39x \phantom{{}+ 70} & \\
\underline{2x^3 + 2x^2 - 4x} \phantom{{}+ 70} & \\
-35x^2 - 35x + 70 & \\
\underline{-35x^2 - 35x + 70} & \\
0 &
\end{array}$$

Проверим

$$\begin{array}{cr|l}
 & x^4 + x^3 - 2x^2 & : x^2 + x - 2 = \\
+ & 2x^3 + 2x^2 - 4x & : x^2 + x - 2 = \\
 & -35x^2 - 35x + 70 & : x^2 + x - 2 = \\ \hline
 & x^4 + 3x^3 - 35x^2 - 39x + 70 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cr}
 & \boldsymbol{x^2} \\
+ & \boldsymbol{2x} \\
 & \boldsymbol{-35} \\ \hline
 & \boldsymbol{x^2 + 2x - 35}
\end{array}$$

Пример 10 показывает, что алгоритм деления «уголком» применим для произвольных многочленов от одной переменной. Таким образом, данный способ имеет более широкие возможности по сравнению с часто используемым на практике делением по схеме Горнера, которое применимо только при делении многочлена на линейный двучлен. Более того, схема Горнера представляет собой фактически сокращенную запись деления «уголком», а значит, обоснование схемы Горнера основано на тех же идеях, что и деление «уголком», а именно, на идее разложения многочлена на сумму двучленов, кратных делителю. Также важно отметить, что способ деления «уголком» быстрее осваивается и лучше запоминается учениками, чем схема Горнера, в силу того, что запись «уголком» знакома им еще с младшей школы.

Заключение. Анализ стандартных алгоритмов выполнения арифметических действий над числами показал, что эти алгоритмы являются краткой записью рассуждений, основанных на поразрядной записи натуральных чисел и на свойствах действий над числами. А так как многочлен от одной переменной – это алгебраическое представление поразрядной записи, то все эти рассуждения справедливы и для многочленов.

Для успешного обучения школьников работе с этими алгоритмами необходимо формирование глубокого понимания их природы, а это лучше всего достигается через уже имеющиеся навыки арифметических действий над натуральными числами.

Библиографический список

1. Алгебра: учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. 7-е изд. М.: Просвещение, 2007. 285 с.

2. Алгебра: задачник для учащихся 7 класса общеобразовательных учреждений. Часть 2. / под ред. А.Г. Мордковича. 16-е изд. М.: Мнемозина, 2012. 271 с.