УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Заика И.В.,

к.т.н., доцент,

доцент кафедры информатики,

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал)

ФГБОУ ВО "РГЭУ (РИНХ),

Россия, г. Таганрог

Аннотация: В работе осуществляется моделирование критериев устойчивости решений дифференциальных уравнений. Для оценки устойчивости применяется схема оптимизации к разностному решению линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Критерии могут использоваться для программной реализации оценки устойчивости.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость решений дифференциальных уравнений.

SIMULATION OF CRITERIA FOR SUSTAINABILITY OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zaika I.V.,

candidate of technical sciences, associate professor,

associate Professor of Informatics,

Taganrog Institute named after A. P. Chekhov (branch) Rostov State University of Economics,

Russia, Taganrog

Annotation: In this work, the stability criteria for the solutions of differential equations are modeled. To evaluate stability, an optimization scheme is applied to the difference solution of a linear system of ordinary differential equations (ODE). Criteria can be used for programmatic implementation of sustainability assessment.

Keywords: дифференциальные уравнения, устойчивость решений дифференциальных уравнений.

Ставится задача дать программные критерии устойчивости в смысле Ляпунова решений дифференциальных уравнений и представить программные схемы исследования этих решений на наличие нулей и экстремумов, а также указать экстремальные значения отклонения возмущенных решений от невозмущенных.

Вначале рассматривается задача Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dt} = A(t)Y, \\ Y(t_0) = Y_0 . \end{cases} \qquad (1)$$

где Y – искомая вектор-функция, координаты $y_1, y_2, ..., y_n$ зависят от t; $A(t)$ – матрица коэффициентов, $n \times n$, и ее элементы – функции одной независимой переменной; $Y(t_0) = Y_0$ – заданный начальный вектор. Пусть для (1) выполнены условия существования и единственности решения на $[t_0, \infty)$.

Метод Эйлера приближённого решения системы (1) имеет вид $Y_{i+1} = Y_i + h\,A(t_i)\,Y_i$, или

$$Y_{i+1} = (E + h\,A(t_i))Y_i,\ i = 0,1,... . \qquad (2)$$

Для дальнейшего существенно, что при любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, t, h и i всегда предполагаются связанными следующими соотношениями:

$$t = t_{i+1},\ h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1},\ i = 0,1,... .$$

Для возмущённого решения системы (1) соотношение (2) примет вид

$$\tilde{Y}_{i+1} = (E + h\,A(t_i))\tilde{Y}_i,\ i = 0,1,... \qquad (3)$$

С учётом (2), (3) для разности между возмущённым и невозмущённым решением получим точное равенство

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))\,(\tilde{Y}_i - Y_i) + Q_i, \qquad (4)$$

где Q_i – погрешность метода Эйлера на шаге. Рекуррентное преобразование (4) влечёт

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0) + L_i,$$

где $L_i = \sum_{k=1}^{i} \prod_{\ell=0}^{i-k} (E + hA(t_{i-\ell}))Q_{k-\ell} + Q_i$. В рассматриваемых условиях выполняется соотношение [1;2] $L_i = O(h)$, в частности, $\lim_{h\to 0} L_i = \vec{0}$. Критерии устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы (1) примут вид

$$\left\| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \le \tilde{c} = \mathrm{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

$$\left\| \lim_{i\to\infty} \prod_{\ell=0}^{i} (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \to 0 \text{ при } t \to \infty \text{ [5]}.$$

Подход к решению этой задачи основан не на известных методах качественной теории дифференциальных уравнений, а на приближенном решении системы дифференциальных уравнений по разностной схеме $Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^{i+1} (E + hA(t_\ell))\, Y_0$. Рост вектора левой части полностью определяется ростом матричного множителя правой части этого соотношения. В частности, максимум или минимум нормы Y_{i+1} будет достигаться в тех же самых точках многомерного пространства, в которых достигается максимум или минимум нормы матрицы $\prod_{\ell=0}^{i+1} (E + hA(t_\ell))$.

Переход от оценки максимума или минимума нормы вектора Y_{i+1} к оценке максимума или минимума нормы матрицы $\prod_{\ell=0}^{i+1} (E + hA(t_\ell))$ имеет то преимущество, что не связывает оценку с начальными данными. Это существенно для оценки устойчивости линейной системы, поскольку для нее либо все решения устойчивы, либо все неустойчивы. На этой основе для таких систем исследуется устойчивость только нулевого решения [1], говорят не об устойчивости какого-либо решения, а об устойчивости данной системы.

Вместо поиска глобального экстремума разностного решения системы линейных ОДУ целесообразно искать глобальный экстремум матрицы $\prod_{\ell=0}^{i+1}(E+hA(t_\ell))$ в области дискретизации независимой переменной и трех числовых параметров системы.

Пример. Дана система линейных ОДУ

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= -a1\,y_1 + y_2\ , \\ \frac{dy_2}{dt} &= -a2\ y_2 + y_3\,, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1 + y_2 - a3\,y_3 \end{aligned}\right\}$$

где вариация коэффициентов $a1$, $a2$, $a3$ происходит в области $6 \le a1 \le 11$, $1 \le a2 \le 5$, $9 \le a3 \le 10$, соответственно, с шагом $ha1 = 0.7$, $ha2 = 0.8$, $ha3 = 0.9$; промежуток изменения независимой переменной $0 \le t \le 15$, шаг ее изменения $ht = 2$.

Коэффициенты правой части данной системы представимы в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -a1 & 1 & 0 \\ 0 & -a2 & 1 \\ 1 & 1 & -a3 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти значение коэффициентов $a1$, $a2$, $a3$ и значение независимой переменной t, доставляющих максимальное отклонение нормы матрицы $\prod_{\ell=0}^{i+1}(E+hA\,)$ от нуля. Такую задачу решает следующий программно представленный алгоритм в [2].

После выполнения программной проверки устойчивости, на выходе которой выводятся все значения нормы матрицы $\prod_{\ell=0}^{i+1}(E+hA(t_\ell))$, по которым оценивается устойчивость решения исследуемой системы. В данном примере получится:

```
  t= 1.000E+0002   norma= 2.900E-0028
  t= 2.000E+0002   norma= 1.927E-0056
……………………………………………..
  t= 2.500E+0003   norma= 1.006E-0694
  t= 2.600E+0003   norma= 8.244E-0721
……………………………………………...
  t= 4.900E+0003   norma= 4.010E-1359
  t= 5.000E+0003   norma= 2.778E-1387
```

Из результатов видно, что норма стремится к нулю, что следует интерпретировать как асимптотическую устойчивость. В ином случае ограниченное изменение нормы интерпретируется как устойчивость, неограниченный рост нормы означает неустойчивость [2; 5].

Данные критерии претерпят существенные изменения для случая нелинейной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dY}{dt}=F(t,Y),\ \ Y(t_0)=Y_0,$$

где $Y=\left(y_1(t),y_2(t),\ldots,y_n(t)\right)$ – искомая вектор-функция, $Y_0=\left(y_1(t_0),y_2(t_0),\ldots,y_n(t_0)\right)$ – вектор начальных данных, $F(t,Y)=\left(f_1(t,Y),f_2(t,Y),\ldots,f_n(t,Y)\right)$ – заданная вектор-функция.

Пусть даны возмущенные начальные данные $\tilde{Y}(t_0)=\tilde{Y}_0$, из некоторой окрестности $\left\|\tilde{Y}_0-Y_0\right\|\le b$, и соответственные им возмущенное решение $\tilde{Y}=\tilde{Y}(t)$.

Схема анализа устойчивости конструируется в достаточно общих условиях, конкретно приведенных в [4-6]. При этом, как и в случае линейной системы, $h=h(i)$ на любом постоянном промежутке $[t_0,t]$, при этом шаг остается равномерным внутри промежутка.

Пусть $d_{ji}=\dfrac{f_j\left(t_i,\tilde{Y}_i\right)-f_j\left(t_i,Y_i\right)}{\tilde{y}_{ji}-y_{ji}}$, $P_{ji}=\prod\limits_{\ell=0}^{i}\left(1+h\,d_{j\ell}\right)$, $j=1,\,2,\,\ldots,n$.

Разность между возмущенным и невозмущенным решениями задачи Коши при условии их отделенности друг от друга определяется равенством $\tilde{y}_j(t) - y_j(t) = \lim_{i\to\infty} P_{ji} \cdot \left(\tilde{y}_{j0} - y_{j0} \right) \ \forall t \in \left[t_0, \infty \right), \ j = 1, 2, \ldots, n$.

В обозначении $P_i = \left(P_{1i}, P_{2i}, \ldots, P_{ni} \right)$ имеет место. Чтобы реализовать программно представленные критерии устойчивости решений линейных и нелинейных систем, достаточно заметить, что они строятся как мультипликативные выражения, поэтому их приближения легко вычисляются циклически. Программная реализация представленных критериев адекватно отражает асимптотическое поведение решения [1; 6].

Библиографический список:

1. Заика И.В. Разработка и исследование схем оптимизации на основе алгоритмов сортировки с приложением к идентификации экстремумов решений дифференциальных уравнений. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук / Таганрогский государственный радиотехнический университет. Таганрог, 2007.
2. Ромм Я.Е., Заика И.В., Тюшнякова И.А. Локализация экстремумов и нулей функций на основе сортировки в приложении к анализу устойчивости // Фундаментальные исследования. 2015. № 12-4. С. 718-723.
3. Ромм Я.Е., Тюшнякова И.А. Применение сортировки для поиска нулей и особенностей функций с приложением к идентификации плоских изображений // Учебное пособие. – Таганрог, 2009.
4. Ромм Я.Е., Тюшнякова И.А. Метод вычисления собственных значений матриц на основе сортировки в приложении к распознаванию изображений // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2006. № 1. С. 11.
5. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир. – 1964. – 478 с.

6. Romm Y.E., Zaika I.V. Numerical sorting-based optimization as applied to general differential and nonlinear equations //Cybernetics and Systems Analysis. 2011. T. 47. № 2. C. 316-329.