УДК 514.16

О РАССЛОЕНИЯХ НЕПРИВОДИМЫХ АЛГЕБР РАЗМЕРНОСТИ 3

Тришина Н. Е.,

к. ф.-м. н., доцент,

Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева,

Москва, Россия

Тришин В. Н.,

к. ф.-м. н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

Россия, Москва

Аннотация

В настоящей статье рассматриваются расслоения, которые определяются всеми типами неприводимых алгебр третьего порядка. Расслоения получаются при разбиении группы Ли обратимых элементов алгебры на левые смежные классы по ее подгруппам. С помощью этого метода найдены четыре расслоения – по одному для алгебр первого и третьего типа и два для алгебры второго типа по классификации Штуди.

Ключевые слова: ассоциативная унитальная алгебра, главное расслоение, факторгруппа.

ON BUNDLES OF IRREDUCIBLE ALGEBRAS OF DIMENSION 3

Trishina N.E.

PhD, Associate Professor,

D.Mendeleev University of Chemical Technology of Russia,

Moscow, Russia

Trishin V.N.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Abstract

The present article deals with the bundles which are defined by all types of irreducible third-order algebras. The bundles are obtained by dividing the Lie group of the invertible elements of the algebra into left cosets by its subgroups. With the help of this method four bundles were found - one for algebras of the first and third types and two for algebra of the second type according to the classification of Study.

Key words: associative unital algebra, principal bundle, quotient group.

Геометрия пространств над алгебрами является одной из традиционных тем казанской геометрической школы. Во второй половине двадцатого века исследования пространств над алгебрами вел Норден и его ученики. Он посвятил несколько работ изучению биаксиальных и связанных с ними пространств. В дальнейшем это понятие было обобщено А.П.Широковым [1], [2]. Б.Н.Шапуков и его ученики изучали геометрические структуры, возникающие при проективизации алгебр и их расслоений [3], [4], [5],[9].

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная унитальная алгебра размерности n, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — множество ее обратимых элементов. Это открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и операции умножения и взятия обратного элемента являются гладкими функциями. Поэтому $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — группа Ли по умножению.

Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — множество обратимых элементов $\mathfrak{B}$. $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ по умножению и замкнутое подмножество, поэтому $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа Ли.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Тогда расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{B}})$, где π — каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой $\widetilde{\mathfrak{B}}$ [13]. Доказано, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра кватернионов, это главное расслоение изоморфно расслоению Хопфа [4], [5].

Приведем подробное описание расслоений для неприводимых алгебр третьего порядка.

I. Рассмотрим алгебру плюральных чисел $\mathfrak{A} = \mathbb{R}(\varepsilon^2)$ с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2	0
e_2	e_2	0	0

Найдем унитальные 2-подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная 2-подалгебра с базисом $\{g_0, g_1\}$, где $g_0 = \mathrm{e}_0 = 1$, $g_1 = ae_1 + be_2$. Тогда

$$(g_1)^2 = (ae_1 + be_2)^2 = a^2 e_2.$$

Следовательно, $(g_1)^2 \in \mathfrak{B}$, когда $a = 0$, то есть $g_1 = e_2$. Поэтому справедлива

Лемма *В алгебре $\mathfrak{A}$ имеется единственная 2-подалгебра, изоморфная алгебре дуальных чисел.*

Для $x = x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2$ найдем обратный элемент $y = x^{-1}$.

$$xy = x^0 y^0 + (x^1 y^0 + x^0 y^1) e_1 + (x^2 y^0 + x^1 y^1 + x^0 y^2) e_2 = 1,$$

поэтому

$$\begin{cases} x^0 y^0 & = & 1, \\ x^1 y^0 + x^0 y^1 & = & 0, \\ x^2 y^0 + x^1 y^1 + x^0 y^2 & = & 0. \end{cases}$$

Тогда, решая систему, получим

$$x^{-1} = \frac{x^0 - x^1 e_1 - x^2 e_2}{(x^0)^2} + \frac{(x^1)^2}{(x^0)^4} e_2.$$

Следовательно, множество обратимых элементов имеет вид

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 \ | x^0 \neq 0, \ x^i \in \mathbb{R}\} \ .$$

Оно образует группу Ли, состоящую из двух связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_2)$ с базисом $\{e_0, e_2\}$, изоморфную алгебре дуальных чисел. Множество обратимых элементов

$$\widetilde{\mathbb{R}}(e_2) = \{a + b e_2 \ | \ a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без прямой.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{R}}(e_2)$. Вычислим произведение

$$(a + b e_2)(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2) = a x^0 + a x^1 e_1 + (a x^2 + b x^0) e_2.$$

Следовательно, смежный класс определяется парой вещественных чисел x^0 и x^1 с точностью до ненулевого вещественного множителя, причем $x^0 \neq 0$. Поэтому фактормножество диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$, а каноническая проекция имеет вид

$$\pi \colon \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R},$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2) = \frac{x^1}{x^0} \ . \qquad (1)$$

Так как

$$\pi(xy) = \frac{x^0 y^1 + x^1 y^0}{x^0 y^0} = \frac{x^1}{x^0} + \frac{y^1}{y^0} = \pi(x) + \pi(y),$$

значит фактормножество является аддитивной группой.

Прообраз точки при отображении π — смежный класс, поэтому расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$ имеет типовой слой, диффеоморфный 2-плоскости без прямой. База расслоения — прямая $\mathbb{R}$, поэтому оно тривиально. Следовательно, справедлива

Теорема *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \ \pi, \ \mathbb{R})$, *определяемое формулой (1), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой* $\mathbb{R}$ *с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно* *произведению* $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathbb{R}}(e_2)$.

II. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}$ с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	e_0	e_2
e_2	e_2	$-e_2$	0

Найдем унитальные 2-подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная 2-подалгебра с базисом $\{g_0, g_1\}$, где $g_0 = e_0 = 1$, $g_1 = ae_1 + be_2$. Тогда

$$(g_1)^2 = (ae_1 + be_2)^2 = a^2.$$

Следовательно, если $a \neq 0$, $\mathfrak{B}$ — подалгебра двойных чисел, а, если $a = 0$, $\mathfrak{B}$ — подалгебра дуальных чисел. Поэтому справедлива

Лемма *Любая 2-плоскость, содержащая единицу, является 2-подалгеброй, изоморфной либо алгебре двойных, либо алгебре дуальных чисел.*

Для $x = x^0 + x^1e_1 + x^2e_2$ найдем обратный элемент $y = x^{-1}$.

$$xy = x^0y^0 + x^1y^1 + (x^1y^0 + x^0y^1)e_1 + [x^2y^0 - x^2y^1 + (x^0 + x^1)y^2]e_2 = 1,$$

поэтому

$$\begin{cases} x^0y^0 + x^1y^1 & = & 1, \\ x^1y^0 + x^0y^1 & = & 0, \\ x^2y^0 - x^2y^1 + (x^0 + x^1)y^2 & = & 0. \end{cases}$$

Тогда, решая систему, получим

$$x^{-1} = \frac{x^0 - x^1e_1 - x^2e_2}{(x^0)^2 - (x^1)^2}.$$

Следовательно, множество обратимых элементов имеет вид

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 | (x^0)^2 - (x^1)^2 \neq 0,\ x^i \in \mathbb{R}\}.$$

Оно образует группу Ли, состоящую из четырех связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_1)$ с базисом $(1,\ e_1)$, изоморфную алгебре двойных чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\widetilde{\mathbb{R}}(e_1) = \{a + be_1 | a^2 - b^2 \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без пары пересекающихся прямых.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{R}}(e_1)$ правых смежных классов. Вычислим произведение

$$(a + be_1)(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2) = ax^0 + bx^1 + (ax^1 + bx^0)e_1 + (a + b)x^2 e_2.$$

Следовательно, смежный класс определяется парой вещественных чисел x^2 и $x^0 + x^1$ с точностью до ненулевого вещественного множителя $a + b$, причем $x^0 + x^1 \neq 0$. Поэтому фактормножество диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$, а каноническая проекция имеет вид

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R},$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2) = \frac{x^2}{x^0 + x^1} \; . \qquad (2)$$

Прообраз точки при отображении π — смежный класс, поэтому расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$ имеет типовой слой, диффеоморфный 2-плоскости без пары пересекающихся прямых. База расслоения — прямая $\mathbb{R}$, поэтому оно тривиально. Следовательно, справедлива

Теорема *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \mathbb{R})$, *определяемое формулой (2), является главным тривиальным расслоением с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без пары пересекающихся прямых. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathbb{R}}(e_1)$.

2. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_2)$ с базисом $(1,\ e_2)$, изоморфную алгебре дуальных чисел. Множество обратимых элементов

$$\widetilde{\mathbb{R}}(e_2) = \{a + be_2 | a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без прямой.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{R}}(e_2)$ правых смежных классов. Вычислим произведение

$$(a + be_2)(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2) = ax^0 + ax^1 e_1 + [ax^2 + b(x^0 - x^1)]e_2.$$

Следовательно, смежный класс определяется парой вещественных чисел $x^0 - x^1$ и $x^0 + x^1$, отличных от нуля, с точностью до ненулевого вещественного множителя a. Поэтому фактормножество диффеоморфно прямой без точки $\mathbb{R}_0$, а каноническая проекция имеет вид

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}_0,$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2) = \frac{x^0 + x^1}{x^0 - x^1}\ . \qquad (3)$$

Так как

$$\pi(xy) = \frac{(x^0 y^0 + x^1 y^1) + (x^0 y^1 + x^1 y^0)}{(x^0 y^0 - x^1 y^1) - (x^0 y^1 + x^1 y^0)} = \pi(x)\pi(y)\ ,$$

значит фактормножество является мультипликативной группой.

Прообраз точки при отображении π — смежный класс, поэтому расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}\ , \pi, \mathbb{R}_0)$ имеет типовой слой, диффеоморфный 2-плоскости без прямой. База расслоения — прямая без точки, поэтому оно тривиально. Следовательно, справедлива

Теорема *Расслоение* $(Q,\ \pi, \mathbb{R}_0)$*, определяемое формулой (3), является главным тривиальным расслоением над мультипликативной группой* $\mathbb{R}_0$ *с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}_0 \times \widetilde{\mathbb{R}}(e_2)$.

III. Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}$ с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2
e_0	e_0	e_1	e_2
e_1	e_1	0	0
e_2	e_2	0	0

Лемма *Любая 2-плоскость, содержащая единицу, является 2-подалгеброй, изоморфной алгебре дуальных чисел.*

Множество обратимых элементов алгебры $\mathfrak{A}$

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 | x^0 \neq 0, x^i \in \mathbb{R}\}$$

образует группу Ли, состоящую из двух связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_1)$ с базисом $(1,\ e_1)$, изоморфную алгебре дуальных чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\widetilde{\mathbb{R}}(e_1) = \{a + b e_1 | a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без прямой.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{R}}(e_1)$ правых смежных классов. Оно является аддитивной группой. Фактормножество диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R},$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2) = \frac{x^2}{x^0} \qquad (4)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi, \mathbb{R})$, *определяемое формулой (4), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой* $\mathbb{R}$ *с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R} \times \widetilde{\mathbb{R}}(e_1)$.

Библиографический список:

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. Казань: изд. КГУ, 1985, 262 с.

2. Shirokov A.P. Spaces over Algebras and Their Applications// Journal of Mathematical Sciences. 2002. Vol. 108, issue 2. P. 232-248. DOI: 10.1023/A:1012896320320

3. Шапуков Б.Н. Расслоения неевклидова 3-пространства гиперболического типа, порожденные алгеброй антикватернионов. I //Ученые записки казанского государственного университета. Т. 147, кн. 1. 2005, С. 181-191.

4. Белова Н.Е. Аналоги расслоения Хопфа// "Всероссийская молодежная научная школа-конференция по мат. моделированию, геометрии и алгебре." (Казань, декабрь 1994 г.): матер.Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 1994, С. 169-174.

5. Тришина Н.Е. Алгебра кватернионов и расслоение биаксиального пространства эллиптического типа.// Успехи в химии и химической технологии. Т. 30. М: Изд-во РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2016, 4 С. 94-96.

6. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, определяемые ассоциативными унитальными алгебрами размерности 3 и 4// Инженерный вестник. – 2017. - №11. - С. 3.

7. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Аналоги расслоения Хопфа, определяемые прямой суммой алгебр комплексных и дуальных чисел// Инновационное развитие. – 2018. - № 8(25).

8. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоение, определяемое приводимой алгеброй порядка 3// Инновационное развитие. – 2018. - № 8(25).

9. Kuzmina I., Mikes J. On pseudoconformal models of fibrations determined by algebra of antiquaternions and projectivization of them.// Annales mathematicae et informaticae. 2013. no 42. P.57-64.

10. Rosefeld B. Geometry of Lie groups. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer academic

publishers. 1997. 393 p.

11. Study E., Cartan E. Nombers complexes// Encyclopedie des sciences mathematiques pures et appliquees. 1908. t. 1. Vol. 1. 329–468.

12. Белова Н.Е. Расслоения, определяемые ассоциативными алгебрами: дисс. ... канд. ф.-м. наук. - Казань, КГУ, 2001. 128 с.

13. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1988, 496 с.

Оригинальность 94%