УДК 519.853.4

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА КВАЗИРЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Киселев В.В.

к.т.н., доцент

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Абдуллин С.Р.

ст. преподаватель,

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Аннотация.

Задачи многокритериальной оптимизации в большинстве случаев являются неустойчивыми. Традиционный метод регуляризации не позволяет во многих случаях получить устойчивую задачу. В работе предлагается пример решения неустойчивой задачи с учетом предпочтений лица принимающего решения.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, регуляризация, Парето-оптимальность, выпуклое программирование.

AN EXAMPLE OF SOLVING AN INCORRECT MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEM USING THE QUASI REGULARIZATION METHOD

Kiselev V. V.

Ph. D., associate Professor

Moscow state technical University

University. N. E. Bauman

Moscow, Russia

Abdullin S. R.

senior lecturer,

Moscow state technical University

University. N. E. Bauman

Moscow, Russia

Annotation.

Multicriteria optimization problems are unstable in most cases. The traditional regularization method does not allow in many cases to obtain a stable problem. The paper offers an example of solving an unstable problem taking into account the preferences of the decision-maker.

Key words: multicriteria optimization, regularization, Pareto-optimality, convex programming.

Будем рассматривать следующую задачу:

заданы M критериев оптимальности $u_i(x)$, $i = \overline{1, M}$, $x \in X \subset R^N$, множество X - ограничено и замкнуто; предполагается, что функции $u_i(x)$ непрерывны на X. Для определенности будем полагать, что все критерии максимизированные. ЛПР (*лицо принимающее решение*) осуществляет выбор лучшего варианта из множества недоминируемых [1], [4].

ЛПР имеет непротиворечивую систему предпочтений [4], выбор варианта осуществляется в процессе человеко-машинной процедуры. ЛПР задает желаемый вариант, компьютер решает оптимизационную задачу и выдает ЛПР недоминируемый вариант, ближайший, в некотором смысле, к желаемому. Далее ЛПР исследует полученный вариант и задает новый желаемый вариант. Процедура повторяется до тех пор, пока ЛПР не получит лучший, с его точки зрения, недоминируемый вариант.

В реальных задачах варианты в пространстве критериев **ε**-неразличимы. Это означает, что, если для двух вариантов u^1 и u^2 выполнено неравенство $|u_i^1 - u_i^2| < \varepsilon_i$, $i = \overline{1, M}$, для некоторого заданного вектора $\boldsymbol{\varepsilon} \in R^M$, $\boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$, то варианты u^1 и u^2 - неразличимы (эквивалентны для ЛПР). Два варианта u^1 и u^2 различимы ЛПР, если для некоторого **i** выполнено $|u_i^1 - u_i^2| > \varepsilon_i$. В силу непрерывности функций $u_i(x)$, **ε**-различимости и ограниченности множества X можно утверждать, что ЛПР достаточно рассмотреть конечное число вариантов.

Структура доминирования в пространстве критериев может быть задана с помощью конуса [1], [3]

$$\Lambda = \{u | (u, H_i) \geq 0, H_i \in R^M, i = 1, L\}. \quad (1)$$

При этом, если для двух вариантов u^1 и u^2, $u^1 \neq u^2$, выполнено включение $u^1 - u^2 \in \Lambda$, то говорят, что вариант u^2 доминирует u^1.

Пример 1. Пусть u$\in R^2$, $H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, тогда $\Lambda = R^+$, в данном случае конусом доминирования является весь положительный ортант, включая соответствующие части осей координат. Для любого замкнутого множества U, множеством недоминируемых вариантов является множество Парето-оптимальных вариантов.

В работе [2] показано, что любой недоминируемый вариант можно получить как решение соответствующей задачи математического программирования

$$t \to max$$
$$(u(x) - (Et + P), H_i) \geq 0,\ i = \overline{1, L} \qquad (2)$$
$$x \in X \subset R^N$$

Однако данная задача является неустойчивой. В работе [3] приводится метод квазирегуляризации для решения таких задач.

Пример 2. Задано множество

$$U = \{u \in R^2 \mid u_1 + u_2 \leq 2, u_1 \geq 0, u_2 \geq 0\}.$$

Заданы вектора $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, задающие конус доминирования, тогда множеством недоминируемых решений является отрезок $[M^1, M^2]$, где

$M^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, M^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. В данной задаче использовать формулу (2) нельзя, поскольку при этом получаем некорректную задачу со множеством решений на всём отрезке $[M^1, M^2]$. Для данной задачи можно использовать метод регуляризации [4], введя регуляризирующую функцию

$$N(u(x)) = \varphi(x) - \alpha V(u(x)), \alpha > 0,\ V(u(x)) = \| u(x) - u^* \|,$$

где u^*-желаемый вариант, заданный ЛПР.

В общем случае множество U(x) может быть невыпуклым. ЛПР исследует множество допустимых значений в процессе человеко-машинной процедуры, задавая желаемые варианты. На каждом шаге решение, выдаваемое компьютером может значительно отличаться от предыдущего. Процедура поиска оптимального решения не является устойчивой. Но если предположить, что для любых двух **ε**-различимых вариантов допустимого множества ЛПР может сказать какой лучше, и, на каждом шаге использовать регуляризирующую функцию, то за конечное число шагов можно выбрать оптимальное решение. Процесс использования регуляризирующей функции на каждом шаге ЧМ процедуры называется квазирегуляризацией [3]. Исследовать все возможные варианты за данное время ЛПР, как правило, не может. Выделение недоминируемых вариантов может значительно сократить время выбора наилучшего варианта, причем, чем уже множество недоминируемых вариантов, тем меньше время выбора. Поскольку понятие Λ-оптимальности включает в себя понятие оптимальности по Парето, то для конусов доминирования Λ при выполнении условия $R^+ \subset \Lambda$ множество Парето-оптимальных вариантов включает в себя множество Λ-оптимальных вариантов.

Пример 3. Для выпуска двух видов продукции используется два вида ресурсов. Известны $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица норм расхода сырья, $Q = (2;1)$ – стоимость ресурсов, $P = (6;9)$ – цена реализации продукции, заданы ограничения на план производства. Найти план производства, максимизирующий одновременно выручку и прибыль.

Решение. Если $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – план производства, то стоимость ресурсов $QAX = 4x_1 + 8x_2$, выручка $u_1 = PX = 6x_1 + 9x_2$, прибыль $u_2 = PX - QAX = 2x_1 + x_2$. Запишем ограничения на план производства и получим задачу:

$$\begin{cases} u_1 = 6x_1 + 9x_2 \to \max, \\ u_2 = 2x_1 + x_2 \to \max, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \le 3, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

В данной задаче множество допустимых значений есть выпуклый пятиугольник Y с вершинами: O=$(0;0)^T$, A=$(0;3)^T$, B=$(2;3)^T$, C=$(3;2)^T$, D=$(3;0)^T$.

Введем линейное преобразование $u = (u_1(x), u_2(x)) : R^2 \to R^2$, определенное критериями u_1 и u_2

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 + 9x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

При этом образом множества Y будет пятиугольник с вершинами:

$u(O) = (0;0)^T$, $u(A) = (27;3)^T$, $u(B) = (39;7)^T$, $u(C) = (36;8)^T$, $u(D) = (18;6)^T$.

Известно, что в данной задаче относительный вес второго критерия может меняться от 1 до 4, что отвечает векторам [1]

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и соответствующему конусу доминирования Λ по формуле (1). Множеством недоминируемых вариантов является целый отрезок [u(B),u(C)]. Для того, чтобы выбрать единственный ответ, ЛПР задает желаемый вариант: $u^* = \begin{pmatrix} 38 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки u(B) и u(C):

$$\frac{36-u_1}{3}=\frac{8-u_2}{-1},$$

которое можно переписать в виде:

$$u_1+3u_2=60\,. \tag{3}$$

Здесь числа 1 и 3 являются координатами вектора нормали. Теперь можно записать уравнение нормали к данной прямой, проходящей через точку u^*

$$\frac{u_1-38}{1}=\frac{u_2-9}{3}.$$

что эквивалентно уравнению:

$$3u_1-u_2=105\,. \tag{4}$$

Пересечение прямых (3) и (4) дает недоминируемую точку $u_{опт}=\begin{pmatrix}37.5\\7.5\end{pmatrix}$,

ближайшую к u^*. Найдем теперь $x_{опт}$ как прообраз оптимальной точки

$$x_{опт}=u^{-1}\left(u_{опт}\right)=\begin{pmatrix}6 & 9\\2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}37.5\\7.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\2.5\end{pmatrix}.$$

В реальных задачах $u_{опт}$ и $x_{опт}$ находятся как решения задачи математического программирования на каждом шаге человеко-машинной процедуры. Введение регуляризирующей функции [5] во многих случаях не делает задачу устойчивой, но сокращает количество обращений к ЛПР и тем самым сокращает время выбора наилучшего варианта.

Библиографический список

1. Kiselev V.V. Application of the Λ-Monotonicity to the Search for Optimal Solutions in Higher-Dimensional Problems // JOURNAL OF MASHEMATICAL SCIENCE. -2016- Volume 216. - Number 5. –pp. 667-673.
2. Киселев В.В. Использование Парето и Λ-оптимальности при решении некоторых классов задач оптимального управления //Вестник финансового университета. – 2016. - №4.-С.72-78.
3. Киселев В.В. Квазирегуляризация в задачах многокритериальной оптимизации// Хроноэкономика.-2018. - №2(10).-С.50-52
4. Yu, P.L. Cone. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives // Optim. Theory Appl. − 1974. − V. 14. − № 3.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986.

Оригинальность 95%