УДК 629.7: 519.7

ЭРГАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: УПРАВЛЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Данилов А.М.
д.т.н., профессор
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства
Пенза, Россия
Гарькина И.А.
д.т.н., профессор
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства
Пенза, Россия

Аннотация
Дается оценка качества имитационного моделирования объектов управления в эргатической системе, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Производится выбор шага интегрирования уравнений движения при различных параметрах запаздывания. Результаты прошли практическую апробацию.

Ключевые слова: эргатические системы, имитационное моделирование, численное интегрирование, запаздывание, оценка динамических характеристик.

ERGATIC SYSTEMS: CONTROL IN THE PRESENCE OF DELAY

Danilov A.M.
doctor of technical sciences, professor
Penza State University of Architecture and Construction
Penza, Russia
Garkina I.A.
doctor of technical sciences, professor
Penza State University of Architecture and Construction
Penza, Russia

Annotation. An assessment is made of the quality of simulation modeling of control objects in an ergatic system described by a system of ordinary differential equations in the Cauchy normal form. The choice of the integration step of the equations of motion for various parameters of the delay is made. The results have been tested in practice.
Keywords: ergatic systems, simulation modeling, numerical integration, delay, evaluation of dynamic characteristics.

Дадим сравнительную оценку функционирования двух эргатических систем

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t):$$

- $u(t) = Px(t)$ (без запаздывания);
- $u(t) = Px(t-\tau)$ (с запаздыванием, τ-параметр запаздывания).

С точностью до τ^2 будем иметь:

$$x(t) = x(t-\tau) + \tau A_1 x(t),\ \ x(t-\tau) \equiv x_0 \quad \text{при } t-\tau \le 0,$$

$$y(t) = y(t-\tau) + \tau\left(Ay(t) + B_1 y(t-\tau)\right),\quad y(t-\tau) \equiv x_0 \ \text{ при } t-\tau \le 0.$$

Для малых τ существуют операторы $(E-\tau A_1)^{-1}$ и $(E-\tau A)^{-1}$. Так что справедливо:

$$x(t) = (E-\tau A_1)^{-1} x(t-\tau),\ \ x(t-\tau) \equiv x_0 \quad \text{при } t-\tau \le t_0,$$

$$y(t) = (E-\tau A)^{-1}(E+\tau B_1) y(t-\tau),\quad y(t-\tau) \equiv x_0 \quad \text{при } t-\tau \le t_0.$$

Имеем:

$$x_k = (E-\tau A_1)^{-k} x_0,\quad k \ge 1;$$

$$x_k \overset{\Delta}{=} x(t_k),\ \ y_k \overset{\Delta}{=} y(t_k),\ \ t_k = t_0 + k\tau;$$

$$x_1 = x_0 + \tau A_1 x_0,\quad \tau A_1 x_0 = x_1 - x_0,$$

$$y_1 = y_0 + \tau\left(Ay_0 + B_1 y(t_0-\tau)\right) = x_0 + \tau A_1 x_0 = x_1;$$

$$x_0 = y_0,\quad x_1 = y_1.$$

При аппроксимации резольвент и операторов, стоящих в правых частях для x_k и y_k, до τ^2 получим:

$$x_k = (E - \tau A)^{-k} x_0 = x_0 + k\tau\tau_1 x_0 + \frac{k(k+1)}{2}\tau A_1 \tau A_1 x_0 =$$

$$= x_0 + k(x_1 - x_0) + \frac{k(k+1)}{2}\tau A_1 (x_1 - x_0),$$

$$y_k = \left[(E - \tau A)^{-1}(E + \tau B_1)\right]^k x_0 = \left[E + \tau A_1 + \tau A \cdot \tau A_1\right]^k x_0 = \left[E + (E + \tau A)\tau A_1\right]^k x_0 =$$

$$= x_0 + k(E + \tau A)(x_1 - x_0) + \frac{k(k+1)}{2}(E + \tau A)^2 \tau^2 A_1^2 x_0.$$

Так что

$$y_k = x_0 + k(x_1 - x_0) + \frac{k(k+1)}{2}\tau(A + BP)(x_1 - x_0) + \tau k BP(x_1 - x_0);$$

$$x_k - y_k = \tau k BP(x_1 - x_0) \quad \text{при } k \geq 2;$$

$$x_k - y_k = \tau^2 k BP(A + BP)x_0 \quad \text{при } k \geq 2.$$

Далее. При шаге интегрирования τ метод Эйлера дает:

$$x_1 = x_0 + \tau(A + B)x_0, \quad y_1 = x_0 + \tau(A + B_1)x_0,$$

$$x_2 = x_1 + \tau(A + B_1)x_1, \quad y_2 = x_1 + \tau(Ax_1 + B_1 x_0),$$

$$x_3 = x_2 + \tau(A + B_1)x_2, \quad y_3 = y_2 + \tau(Ay_2 + B_1 x_1),$$

$$x_1 = y_1, \; x_2 - y_2 = \tau B_1(x_1 - x_0).$$

Из

$$\tau A(x_2 - y_2) = \tau^2 AB_1(x_1 - x_0), \quad \tau B_1(x_2 - x_1) = \tau B_1(x_1 - x_0 + \tau A_1(x_1 - x_0)),$$

$$x_3 - y_3 = (x_2 - y_2) + \tau A(x_2 - y_2) + \tau B_1(x_2 - x_1),$$

следует

$$x_3 - y_3 = 2\tau B_1(x_1 - x_0) + 0(\tau^2);$$

$$x_k - y_k = \tau(k-1)B_1(x_1 - x_0) = \tau^2 BP(k-1)(A + BP)x_0.$$

При малых значениях k - $(k-1)$ получим лишь незначительную разницу в оценках (связано с характером аппроксимации решения).

Можно получить и более точные оценки при аппроксимации решения на каждом шаге в виде:

$$x(t) = x(t-\tau) + \tau A_1 x(t) + \frac{\tau^2}{2} A_1^2 x(t) + 0(\tau^3)\ .$$

Имеем

$$y(t) = y(t-\tau) + \tau\big(Ay(t) + B_1 y(t-\tau)\big) +$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\Big(A\big(Ay(t) + B_1 y(t-\tau)\big) + B_1\big(Ay(t-\tau) + B_1 y(t-2\tau) + 0(\tau^3)\big)\Big).$$

Вычисления усложняются, результат практически не изменился.

При относительно малых значениях запаздывания в методе Эйлера за шаг интегрирования можно принять $\delta = \tau m$:

$x_1 = \delta(A + B_1)x_0 + x_0, \quad \delta A_1 x_0 = x_1 - x_0, \quad y_1 = \delta(A + B_1)x_0 + x_0, (x_1 = y_1).$

Из $y(t_k - \tau) \equiv x_0,\ k \le m$ следует:

$$x_k = x_{k-1} + \delta(A + B_1)x_{k-1},\ y_k = y_{k-1} + \delta A y_{k-1} + \delta B_1 x_0.$$

Для $k \le m$:

$$x_2 - y_2 = \delta B_1(x_1 - x_0),$$

$$x_3 - y_3 = x_2 - y_2 + \delta A(x_2 - y_2) + \delta B_1(x_2 - x_0) =$$

$$= \delta B_1(x_1 - x_0) + \delta B_1(x_2 - x_0) + 0(\delta^2) = \delta B_1(x_1 + x_2 - 2x_0) + 0(\delta^2),$$

$$x_4 - y_4 = x_3 - y_3 + \delta B_1(x_3 - x_0) = \delta B_1(x_1 + x_2 + x_3 - 2x_0) + 0(\delta^2),$$

$$x_k - y_k = \delta B_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1} - (k-1)x_0) + 0(\delta^2), \quad k \le m.$$

Легко показать:

$$\sum_{j=1}^{k=1} x_j = (k-1)x_0 + \frac{k(k-1)}{2}(x_1 - x_0).$$

Справедливо:

$$x_k - y_k = \frac{k(k-1)}{2}\delta^2 BP(A + BP)x_0, \quad k \le m.$$

Получим оценки и при $k > m$. Так, например, при $k = m + 1$:

$$y(t_k - \tau) = y_1 = x_1,$$

$$x_{m+1} - y_{m+1} = x_m - y_m + \delta A(x_m - y_m) + \delta B_1(x_m - x_1) =$$
$$= \frac{m(m-1)}{2}\delta B_1(x_1 - x_0) + 0(\delta^2) + \delta B_1(x_0 + m(x_1 - x_0) - x_1) =$$
$$= \left(\frac{m(m-1)}{2} + (m-1)\right)\delta B_1(x_1 - x_0) \approx \frac{m(m+1)}{2}\delta BP(x_1 - x_0).$$

А при $1 < j \le m-1$ будем иметь:

$$x_{m+j+1} - y_{m+j+1} = x_{m+j} - y_{m+j} + \delta A(x_{m+j} - y_{m+j}) + \delta B_1(x_{m+j} - y_j) =$$
$$= \delta\left(\frac{m(m-1)}{2} + jm\right)BP(x_1 - x_0).$$

Результаты оценки апробировались при настройке параметров объекта эргатической системы с учетом процессов формирования реакций оператора [1…5].

Библиографический список

1. Будылина Е.А., Гарькина И.А., Данилов А.М., Пылайкин С.А. Аналитическое определение имитационных характеристик тренажных и обучающих комплексов / Фундаментальные исследования. – 2014. – № 6. – С. 698.
2. Гарькина И.А., Данилов А.М., Дулатов Р.Л. Эргатические системы: управление, селекция информативных сигналов, моделирование / Современные проблемы науки и образования. - 2015. - № 1-1. - С. 64.
3. Граб И.Д., Затылкин А.В., Алмаметов В.Б., Юрков Н.К. Определение психофизического состояния обучаемого на основе измерения электрокожного сопротивления / Труды международного симпозиума Надежность и качество. - 2010. - Т. 2. - С. 453-455.
4. Лапшин Э.В., Трусов В.А. Использование методов численного интегрирования в моделях летательных аппаратов / Труды международного симпозиума Надежность и качество. - 2016. - Т. 2. - С. 336-338.
5. Дивеев А.И., Северцев Н.А.,Софронова Е.А. Эффективный алгоритм для синтеза структуры системы автоматического управления / Труды международного симпозиума Надежность и качество. - 2007. - Т. 1. - С. 20-23.

Оригинальность 81%