УДК 517.9

МЕТОД СОВЕРШЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В РАЗРАБОТКЕ ДИНАМИЧЕСКИХСИСТЕМ

Данилов А.М.
д.т.н., профессор
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства
Пенза, Россия
Гарькина И.А.
д.т.н., профессор
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства
Пенза, Россия

Аннотация. На примере динамической системы второго порядка с задержками в канале управления показывается эффективность применения метода совершенных операторов. Определяется точное аналитическое описание решения поставленной задачи для различных параметров задержек.

Ключевые слова: алгебраическое операционное исчисление, совершенные операторы, задержки в канале управления, выходные координаты, связь

METHOD OF PERFECT OPERATORS IN THE DEVELOPMENT OF DYNAMIC SYSTEMS

Danilov A.M.
doctor of technical sciences, professor
Penza State University of Architecture and Construction
Penza, Russia
Garkina I.A.
doctor of technical sciences, professor
Penza State University of Architecture and Construction
Penza, Russia

Annotation. Using the example of a second-order dynamic system with delays in the control channel, the efficiency of using the method of perfect operators is shown. The exact analytical description of the solution of the problem for various parameters of delays is determined.
Keywords: algebraic operational calculus, perfect operators, control channel delays, output coordinates, communication

Одним из наиболее важных и сложных этапов создания тренажных и обучающих комплексов является имитация динамики моделируемого объекта эргатической системы. Анализ технического уровня отечественных разработок показывает недостаточный уровень исходной информации для обеспечения полноты математической модели объекта управления. Велики искажения динамических процессов, связанных с инженерно-психологическими основами формирования управляющих сигналов оператора (в конечном итоге это связано с моделированием задержек и их дислокаций в канале управления). Обоснование необходимой и достаточной точности моделирования динамики предполагает учет условий формирования полноценных профессиональных навыков при обучении на имитационных моделях (организмический принцип первого и второго рода!).

Ограничимся конкретным примером динамической системы вида:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha'(t) = a_{11}\alpha(t) + a_{12}\omega(t) + b_1 u(t)\\
&\omega'(t) = a_{21}\alpha(t) + a_{22}\omega(t) + b_2 u(t)\\
&cu'(t) = p_1\alpha(t-\tau_1) + p_2\omega(t-\tau_2) + p_3\theta(t-\tau_2) - u(t)\\
&\theta'(t) = \omega(t)\\
&(t \ge 0)
\end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha(t)=S_1(t),\ t\le 0\\ \omega(t)=S_2(t),\ t\le 0\\ \alpha(+0)=S_1(0)\\ \omega(+0)=S_2(0)\\ u(+0)=u_0\\ \theta(+0)=\int\limits_{-\tau_2}^{0}S_2(\eta)d\eta\end{array}\right\};$$

$$\tau_1,\ \tau_2>0\,.$$

Примем

$$\varphi*\psi=\frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\eta)\psi(\eta)d\eta=\frac{d}{dt}(\varphi\times\psi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t-\eta)\psi'(\eta)d\eta=(\varphi\times\psi');$$

$(\varphi(t))_+=\{\varphi(t),\ t>0;\quad 0,\ t\le 0\}$, $\psi=[\psi(t)]$ - оператор типа функции $\psi(t)$;

$\varphi'=D*(\varphi-\varphi(+0))$, $\varphi=[(\varphi(t))_+]$, D - оператор дифференцирования;

$T_\tau*\psi=\psi(t-\tau)\quad(T_0=1_+)$, T_τ - оператор сдвига.

Численные операторы γ_+, то есть операторы типа функций $\gamma_+=\{\gamma,t>0;\quad 0,t\le 0\}$, будем здесь, когда это не вызовет недоразумений, обозначать как числа γ [1…3].

В операторной форме:

$$\left.\begin{array}{l}D*(\alpha-S_1(0))=a_{11}\alpha+a_{12}\omega+b_1u\\ D*(\omega-S_2(0))=a_{21}\alpha+a_{22}\omega+b_2u\\ cD*(u-u_0)=p_1T_{\tau_1}*(S_1+\alpha)+p_2T_{\tau_2}*(S_2+\omega)+\\ \qquad\qquad+p_3T_{\tau_3}*D^{*-1}*(S_2+\omega)-u\end{array}\right\};$$

$$\begin{array}{l}\alpha=[(\alpha(t))_+],\\ \omega=[(\omega(t))_+],\quad u=[(u(t))_+],\end{array}$$

$$S_1=[0,\ t<-\tau_i;\quad S_i(t),-\tau_i\le t\le 0;\quad 0,t>0]\quad(i=1,2).$$

Откуда

$$\begin{array}{l}cD^{*3}E+D^{*2}(E-cA)-D*(A+QT_{\bar\tau})-p_3T_{\tau_2}\bar b[0\,1]^{*-1}*\bar x=\\ =cD^{*3}*\bar S_0+D^{*2}(\bar S_0+cu_0\bar b)+D*QT_{\bar\tau}*S+p_3T_{\tau_2}*S_2\bar b.\end{array}$$

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}b_1p_1 & b_1p_2\\ b_2p_1 & b_2p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}=\mathbf{bp},\ \mathbf{p}=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix},\ |Q|=0,$$

$$\bar{\tau}=\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{bmatrix},\ T_{\bar{\tau}}=\begin{bmatrix}T_{\tau_1} & 0\\ 0 & T_{\tau_2}\end{bmatrix},\ \bar{x}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \omega\end{bmatrix},\bar{S}=\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\end{bmatrix},\bar{S}_0=\begin{bmatrix}S_1(0)\\ S_2(0)\end{bmatrix}.$$

Справедливо:

$$\bar{x}=\left(cD^{*3}E+D^{*2}(E-cA)-D*(A+A+QT_{\bar{\tau}})-p_3T_{\tau_2}\bar{b}[0\,1]^{*-1}\right)*$$
$$*\left(cD^{*3}*\bar{S}_0+D^{*2}\left(\bar{S}_0+cu\bar{b}\right)+D*QT_{\bar{\tau}}*\bar{S}+p_3T_{\tau_2}*S_2\bar{b}\right).$$

Рассмотрим случай $c=0,\ p_3=0$:

$$\bar{x}=\left(DE-A-QT_{\bar{\tau}}\right)^{*-1}*\left(D\bar{S}_0+QT_{\tau}*\bar{S}\right).$$

При $\tau_1=\tau_2=0$:

$$\bar{x}\,|_{\bar{\tau}=0}=\left(DE-A-Q\right)^{*-1}*D\bar{S}_0;$$

$$\left(DE-A-Q\right)^{*-1}*QT_{\bar{\tau}}*\bar{S}=\left(\left(DE-A-Q\right)^{*-1}*Q\right)*\bar{S}=0.$$

Имеем:

$$\left(DE-K\right)^{*-1}=\left(D^{*2}-(k_{11}+k_{22})*D+|K|\right)^{*-1}*\left(DE-\hat{K}\right),\ \hat{K}=\begin{bmatrix}k_{22} & -k_{12}\\ -k_{21} & k_{11}\end{bmatrix};$$

$$\bar{x}=\left(D^{*2}-(k_{11}+k_{22})*D+|K|\right)^{*-1}*\left(DE-\hat{K}\right)*\left(D\bar{S}_0+QT_{\bar{\tau}}*\bar{S}\right);$$

$$\bar{x}=\left(D^{*2}-(k_{11}+k_{22})*D+|K|\right)^{*-1}*\left(D^{*2}\bar{S}_0+D*\left(QT_{\bar{\tau}}*\bar{S}-\hat{K}\bar{S}_0\right)+\hat{K}QT_{\bar{\tau}}*\bar{S}\right),$$

$$K=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}=A+QT_{\bar{\tau}};$$

$$\bar{x}\,|_{\bar{\tau}=0}=\left(D^{*2}-(k_{11}^0+k_{22}^0)*D+|K^0|\right)^{*-1}*\left(D^{*2}\bar{S}_0-D\hat{K}\bar{S}_0\right),K_0=\begin{bmatrix}k_{11}^0 & k_{12}^0\\ k_{21}^0 & k_{22}^0\end{bmatrix}=A+Q;$$

$$|K|=\begin{vmatrix}a_{11}+b_1p_1T_{\tau_1} & a_{12}+b_1p_2T_{\tau_2}\\ a_{21}+b_2p_1T_{\tau_1} & a_{22}+b_2p_2T_{\varsigma_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+p_1\begin{vmatrix}b_1a_{12}\\ b_2a_{22}\end{vmatrix}T_{\tau_1}+p_2\begin{vmatrix}a_{11}b_1\\ a_{21}b_2\end{vmatrix}T_{\tau_2};$$

$$\left|K^0\right| = \begin{vmatrix} a_{11}+b_1p_1 & a_{12}+b_1p_2 \\ a_{21}+b_2p_1 & a_{22}+b_2p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + p_1\begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix} + p_2\begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix}.$$

Имеем

$$|K| = \Delta + p_1\Delta_1 T_{\tau_1} + p_2\Delta_2 T_{\tau_2},$$

$$\left|K^0\right| = \Delta + p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2,$$

$$k_{11} + k_{22} = \sigma + b_1p_1T_{\tau_1} + b_2p_2T_{\tau_2}$$

$$k_{11}^0 + k_{22}^0 = \sigma + b_1p_1 + b_2p_2,$$

$$\hat{K} == \hat{A} + \hat{T}_{\bar{\tau}}\hat{Q},$$

$$\hat{K}^0 = \hat{A} + \hat{Q},$$

Получим

$$\overline{\upsilon} = \begin{bmatrix} b_1p_1T_{\tau_1} * S_1 + b_1p_2T_{\tau_2} * S_2 + p_2\left(b_1S_2(0) - b_2S_1(0)\right)T_{\tau_2} \\ b_2p_1T_{\tau_1} * S_1 + b_2p_2T_{\tau_2} * S_2 + p_1\left(b_2S_1(0) - b_1S_2(0)\right)T_{\tau_1} \end{bmatrix},$$

$$\overline{\omega} = \begin{bmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1p_1 & b_1p_2 \\ b_2p_1 & b_2p_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{\tau_1} & 0 \\ 0 & T_{\tau_2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -p_1\Delta_1 & -p_2\Delta_1 \\ -p_1\Delta_2 & -p_2\Delta_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{\tau_1} * S_1 \\ T_{\tau_2} * S_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} p_1\Delta_1T_{\tau_1} * S_1 + p_2\Delta_1T_{\tau_2} * S_2 \\ p_1\Delta_2T_{\tau_1} * S_1 + p_2\Delta_2T_{\tau_2} * S_2 \end{bmatrix}.$$

$$T_{\tau_1} * S_1 = \left[0,\, t<0;\; S_1(t-\tau_1), 0 \le t \le \tau_1;\; 0, t > \tau_1\right],$$
$$T_{\tau_2} * S_2 = \left[0,\, t<0;\; S_2(t-\tau_2), 0 \le t \le \tau_2;\; 0, t > \tau_2\right]$$

При $\tau_i = 0\ (i = 1,2)$ $\quad T_{\tau_i} * S_i = S_i$ есть оператор типа функции (отличен от нуля лишь при $t = 0$). Далее $\overline{\upsilon}, \overline{\omega}$ встретятся лишь в выражениях вида $\psi * \overline{\upsilon}, \psi * \overline{\omega}$, поэтому в случае $\tau_i = 0$ в выражениях υ, ω члены, содержащие S_i множителем, можно опустить.

При $\tau_1 = \tau_2 = \tau > 0$:

$$\overline{\upsilon} = T_\tau * \begin{bmatrix} b_1\left(p_1S_1 + p_2S_2\right) + p_2\left(b_1S_2(0) - b_2S_1(0)\right) \\ b_2\left(p_1S_1 + p_2S_2\right) + p_1\left(b_2S_1(0) - b_1S_2(0)\right) \end{bmatrix},$$

$$\overline{\omega} = -T_{\tau} \circ \begin{bmatrix} p_1\Delta_1 S_1 + p_2\Delta_1 S_2 \\ p_1\Delta_2 S_1 + p_2\Delta_2 S_2 \end{bmatrix}.$$

Из изложенного следует:

$$\overline{x} = \left(D^{*2} - \left(\sigma + b_1 p_1 T_{\tau_1} + b_2 p_2 T_{\tau_2}\right) * D + \Delta + p_1\Delta_1 T_{\tau_1} + p_2\Delta_2 T_{\tau_2}\right)^{*-1} *$$
$$* \left(D^{*2}\overline{S}_0 + D * \left(\overline{\upsilon} - \hat{A}\overline{S}_0\right) + \overline{\omega}\right).$$

При $\overline{\tau} \neq 0$ возможны случаи:

1. $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$.

Тогда

$$\overline{x} = \left(D^{*2} - \sigma D + \Delta\right)^{*-1} * \left(1 - \left(D^{*2} - \sigma D + \Delta\right)^{*-1} * \left(T_{\tau_1} * \left(b_1 p_1 D - p_1\Delta_1\right) + T_{\tau_2} * \left(b_2 p_2 D - p_2\Delta_2\right)\right)\right)^{*-1} *$$
$$* \left(D^{*2}\overline{S}_0 + D * \left(\overline{\upsilon} - \hat{A}\overline{S}_0\right) + \overline{\omega}\right).$$

Отсюда

$$\overline{x} = \left(D^{*2} - \sigma D + \Delta\right)^{*-1} * \left(D^{*2}\overline{S}_0 + D * \left(\overline{\upsilon} - \hat{A}\overline{S}_0\right)\overline{\omega}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} T_{m\tau_1 + (k-m)\tau_2} * \left(D^{*2} - \sigma D + \Delta\right)^{*-k} * \left(b_1 p_1 D - p_1\Delta_1\right)^{*m} * \left(b_2 p_2 D - p_2\Delta_2\right)^{*k-m} *$$
$$* \left(D^{*2} - \sigma D + \Delta\right)^{*-1} * \left(D^{*2}\overline{S}_0 + D * \left(\overline{\upsilon} - \hat{A}\overline{S}_0\right) + \overline{\omega}\right).$$

2. $\tau_1 > 0, \tau_2 = 0$.

$$\overline{x} = \left(D^{*2} - \left(\sigma + b_2 p_2\right)D + \Delta + p_2\Delta_2\right)^{*-1} *$$
$$* \left(1 - \left(D^{*2} - \left(\sigma + b_2 p_2\right)D + \Delta + p_2\Delta_2\right)^{*-1} * T_{\tau_1} * \left(b_1 p_1 D - p_1\Delta_1\right)\right)^{*-1} * \left(D^{*2}\overline{S}_0 + D * \left(\overline{\upsilon} - \hat{A}\overline{S}_0\right) + \overline{\omega}\right)$$

Отсюда

$$\overline{x} = \left(D^{*2} - \left(\sigma + b_2 p_2\right)D + \Delta + p_2\Delta_2\right)^{*-1} * \left(D^{*2}\overline{S}_0 + D * \left(\overline{\upsilon} - \hat{A}\overline{S}_0\right) + \overline{\omega}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} T_{\mu\tau_1} * \left(D^{*2} - \left(\sigma + b_2 p_2\right)D + \Delta + p_2\Delta_2\right)^{*-k} * \left(b_1 p_1 D - p_1\Delta_1\right)^{*k} *$$
$$* \left(D^{*2} - \left(\sigma + b_2 p_2\right)D + \Delta + p_2\Delta_2\right)^{*-1} * \left(D^{*2}\overline{S}_0 + D * \left(\overline{\upsilon} - \hat{A}\overline{S}_0\right) + \overline{\omega}\right)$$

3. $\tau_1 = 0, \tau_2 > 0$.

По предыдущему

$$\bar{x}=\left(D^{*2}-(\sigma+b_1p_1)D+\Delta+p_1\Delta_1\right)^{*-1}*\left(D^{*2}\bar{S}_0+D*\left(\bar{\upsilon}-\hat{A}\bar{S}_0\right)+\bar{\omega}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}T_{k\tau_2}*\left(D^{*2}-(\sigma+b_1p_1)D+\Delta+p_1\Delta_1\right)^{*-k}*\left(b_2p_2D-p_2\Delta_2\right)^{*k}*$$
$$*\left(D^{*2}-(\sigma+b_1p_1)D+\Delta+p_1\Delta_1\right)^{*-1}*\left(D^{*2}\bar{S}_0+D*\left(\bar{\upsilon}-\hat{A}\bar{S}_0\right)+\bar{\omega}\right)$$

При $\bar{\tau}=0$, $\tau_1=\tau_2=0$:

$$\bar{x}\,|_{\bar{\tau}=0}=\left(D^{*2}-(\sigma+b_1p_1+b_2p_2)D+\Delta+p_1\Delta_1+p_2\Delta_2\right)^{*-1}*\left(D^{*2}\bar{S}_0-D\left(\hat{A}+\hat{Q}\right)\bar{S}_0\right).$$

Точное аналитическое решение $(c=o, p_3=0)$ представится в одном из следующих видов:

1. При $\tau_1>0,\ \tau_2>0$:

$$\bar{x}=\bar{f}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}T_{m\tau_1+(k-m)\tau_2}*\left(\underbrace{f_1\times\ldots\times f_1}_{m}\times\underbrace{f_2\times\ldots\times f_2}_{k-m}\times\bar{f}\right)=$$
$$=f+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\left\{\int_{o}^{t-m\tau_1-(k-m)\tau_2}f_1\left(t-m\tau_1-(k-m)\tau_2-\xi_m\right)d\xi_m\ldots\right.$$
$$\ldots\int_0^{\xi_2}f_1(\xi_2-\xi_1)d\xi_1\int_0^{\xi_1}f_2(\xi_1-\eta_{k-m})d\eta_{k-m}\ldots$$
$$\ldots\int_0^{\eta_2}f_2(\eta_2-\eta_1)\bar{f}(\eta_1)d\eta_1,\qquad t-m\tau_1-(k-m)\tau_2>0;$$
$$\left.0,t-m\tau_1-(k-m)\tau_2\le 0\right\}.$$

2. При $\tau_1>0,\tau_2=0$:

$$\bar{x}=\bar{f}+\sum_{k=1}^{\infty}T_{k\tau_1}*\left(\underbrace{f_1\times\ldots\times f_1}_{k}\times\bar{f}\right)=$$
$$=\bar{f}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^{t-k\tau_1}f_1(t-k\tau_1-\eta_k)d\eta_k\ldots\int_0^{\eta_2}f_1(\eta_2-\eta_1)\bar{f}(\eta_1)d\eta_1,t-k\tau_1>0;\,0,t-k\tau_1\le 0\right\}$$

3. При $\tau_1=0,\tau_2>0$:

$$\bar{x}=\bar{f}+\sum_{k=1}^{\infty}T_{k\tau_2}*\left(\underbrace{f_2\times\ldots\times f_2}_{k}\times\bar{f}\right)=$$
$$=\bar{f}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^{t-k\tau_2}f_2(t-k\tau_2-\eta_k)d\eta_k\ldots\int_0^{\eta_2}f_2(\eta_2-\eta_1)\bar{f}(\eta_1)d\eta_1,t-k\tau_2>0;\,0,t-k\tau_2\le 0\right\}$$

4. При $\bar{\tau} = 0$:

$$F = D^{*2} - (\sigma + b_1 p_1 + b_2 p_2)D + \Delta + p_1\Delta_1 + p_2\Delta_2,$$

$$\gamma = \frac{\sigma + b_1 p_1 + b_2 p_2}{2}, \ \lambda^2 = \frac{(\sigma + b_1 p_1 + b_2 p_2)^2}{4} - \Delta - p_1\Delta_1 - p_2\Delta_2 = -\mu^2;$$

$$\bar{x} = \begin{cases} \left(e^{\gamma t}\left(E + t\left(\gamma E - \left(\hat{A} + Q\right)\right)\right)\bar{S}_0\right)_+, & \lambda^2 = 0 \\ \left(e^{\gamma t}\left(ch(\lambda t)E + \frac{1}{\lambda}sh(\lambda t)\left(\gamma E - \left(\hat{A} + \hat{Q}\right)\right)\right)\bar{S}_0\right)_+, & \lambda^2 > 0 \\ \left(e^{\gamma t}\left(\cos(\mu t)E + \frac{1}{\mu}\sin(\mu t)\left(\gamma E - \left(\hat{A} + \hat{Q}\right)\right)\right)\right)\bar{S}_{0+}, & \lambda^2 = -\mu^2 < 0. \end{cases}$$

Как видим, совершенствование математического моделирования динамики объекта можно осуществить за счет построения рациональных математических моделей на базе гибкого модульного программно-математического обеспечения, автоматизации проектирования испытаний, разработки методик идентификации, настройки и корректировки моделей.

Результаты прошли апробацию при разработке имитаторов динамики [4…6].

Библиографический список

1. Рябцев И. И. К общей теории совершенных операторов / Известия Вузов. Математика. – 1985. – № 3. – С. 76-81.
2. Данилов А.М., Лапшин Э.В., Гарькина И.А. Влияние временного запаздывания при имитационном моделировании динамических систем / Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. - 2007. - № 1. - С. 74-90.
3. Будылина Е.А., Гарькина И.А., Данилов А.М., Пылайкин С.А. Аналитическое определение имитационных характеристик тренажных и обучающих комплексов / Фундаментальные исследования. - 2014. - № 6-4. - С. 698-702.

4. Гришко А.К., Юрков Н.К., Кочегаров И.И. Методология управления качеством сложных систем / Труды международного симпозиума Надежность и качество. - 2014. - Т. 2. - С. 377-379.
5. Васильев С.Н., Морозов Н.Ю. О модельных аналогиях в математической теории систем / В сборнике: Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого) Материалы XIII Международной конференции. - 2016. - С. 85-89.
6. Лапшин Э.В., Трусов В.А. Использование методов численного интегрирования в моделях летательных аппаратов / Труды международного симпозиума Надежность и качество. - 2016. - Т. 2. - С. 336-338.

Оригинальность 70%