

УДК 51-76

***МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЫЖИВАЕМОСТИ ПОПУЛЯЦИЙ  
НА ЗАГРЯЗНЕННОЙ ТЕРРИТОРИИ***

***Романова А.Б.***

*студент*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*С.-Петербург, Россия*

***Колтак Е.П.***

*профессор, доктор физико-математических наук*

*Санкт-Петербургский государственный университет*

*С.-Петербург, Россия*

**Аннотация.** Разработана модель одиночной популяции, находящейся под антропогенным давлением, с ограниченным ростом. Учитываются возможные изменения в рождаемости и смертности отдельных особей, уменьшение трофического ресурса и стрессовое давление на всю популяцию в целом. Дана оценка возможного изменения распределения по численности не взаимодействующих популяций и оценка числа выживших популяций в пораженных ареалах в зависимости от степени загрязнения среды обитания.

**Ключевые слова:** Популяция, математическое моделирование, токсичность, поллютант, антропогенное давление, выживаемость.

***MATHEMATICAL MODEL OF POPULATION SURVIVAL IN A  
POLLUTED AREA***

***Romanova A.B.***

*student*

*Saint Petersburg State University*

*St. Petersburg, Russia*

***Kolpak E.P.***

*professor, doctor of physical and mathematical sciences*

*Saint Petersburg State University*

*St. Petersburg, Russia*

**Annotation.** They developed a model of a single population, pressured by anthropogenic factors with restricted growth. Taken into account possible changes in birth rate and mortality rate of particular species, decrease of trophic resource and stress pressure overall population. They gave assessment of possible spreading change of population size of non – interacting species, and number assessment of surviving species in damaged geographic ranges depending on pollution rate of the environment.

**Keywords:** Population, Mathematical modeling, toxicity, pollutant, anthropogenic pressure, survival rate.

Промышленное производство в XX веке и потребление энергетических ресурсов происходило с высокими темпами. Рост мирового валового продукта от начала до конца XX в. увеличился более чем в 650 раз. Добыча и переработка различных видов природных ресурсов происходили в зависимости от вида с темпами роста от 4 – до 10 процентов в год. Процесс экономического развития различных регионов сопровождался и сопровождается нарушением нормального хода протекающих в различных биогеоценозах процессов [3; 11]. Вредные для всего живого вещества антропогенного происхождения, такие как окислы серы, соединения азота, металлическая пыль, тяжелые металлы, наполняют воздушный и водный бассейны, загрязняя обширные территории. Загрязнение среды ведет к кардинальным изменениям условий существования населяющих эти территории растений и животных, может изменить направленность и формы естественного отбора и генетическую структуру природных популяций,

привести к уменьшению видового разнообразия и исчезновению отдельных видов [6].

Биодоступность различных элементов зависит от формы их существования в окружающей среде, их токсичности и способности к комплексообразованию, уязвимости организма-реципиента. В эволюционном процессе живого вещества сложилось равновесное соотношение между концентрацией веществ во внешней среде и в организме. При превышении концентрации микроэлементов в окружающей среде порогового значения, которое зависит от множества геохимических факторов, внешний «избыток» веществ разными путями может поступать в живой организм [5; 9].

Накопление тяжелых металлов и их химических соединений происходит в первую очередь в тех структурах организма, которые лимитируют процессы метаболизма и биосинтеза. Накопленные вещества могут мимикрировать под элементы, необходимые для нормальной жизнедеятельности организма, вызывая нарушение многих биохимических функций в клетках. Это приводит к тяжелым поражениям жизненно важных органов и нервной системы, а также отрицательно влияет на наследственность, изменяет плодовитость и продолжительность жизни. Вместе с этим в организме срабатывают и защитные механизмы, направленные на снижение потенциальной токсичности элементов путем ограничения их активности во внутриклеточных образованиях [9].

Математическая модель одиночной популяции с ограниченным ростом имеет вид [2, 7, 8]

$$\frac{dN}{dt} = \mu N(1 - N/K) \quad (1)$$

где  $\mu$  – удельная скорость роста популяции, определяемая как разность между рождаемостью и смертностью особей, а  $K$  – емкость экологической ниши (максимально допустимая численность особей, которых может содержать среда проживания).

В процессе эволюции живого вещества рождаемость и смертность особей в популяции медленно изменялись в течение тысячелетий под влиянием внешних и внутренних факторов. На временных интервалах длиной несколько столетий их можно считать неизменными. В условиях антропогенного давления на популяцию накопление организмом токсичных веществ в больших количествах может изменить внутренний метаболизм организма. В результате изменяются плодовитость особей, время вынашивания плода, различные физические характеристики особей.

Как показывает анализ результатов полевых наблюдений [10] токсиканты накапливаются в организме, живущем на загрязненной территории, до некоторого порогового значения. Такое ограничение вызвано защитными механизмами, обеспечивающими вынос из организма отдельных элементов [4]. При этом, если популяция не погибает, то изменяется ее удельная скорость роста. Если считать, что  $P = P(t)$  концентрация токсикантов в среде обитания популяции, то можно принять, что удельная скорость роста численности популяции изменяется на величину

$$\frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P}, \quad (2)$$

где,  $a_1$  и  $a_2$  положительные параметры. При  $P = 0$  токсиканты отсутствуют, а при  $P \rightarrow \infty$  удельная скорость роста стремится к  $\mu a_1 / a_2$ . Если удельная скорость в условиях наличия в среде токсикантов уменьшается, то должно выполняться неравенство  $a_1 < a_2$ . Зависимость (2) учитывает факт ограниченного накопления токсичных веществ организмами особей популяции, изменение рождаемости и смертности, за счет нарушения внутреннего метаболизма организма, насыщенного токсикантами.

Загрязнители среды могут уничтожить часть трофического ресурса или сделать его недоступным для популяции. В этом случае можно считать, что

загрязнители уменьшают емкость среды обитания популяции. Это можно учесть, приняв, что в этом случае емкость среды изменяется на величину

$$\frac{1 + b_1 P}{1 + b_2 P}, \quad (3)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  – положительные параметры. При выполнении неравенства  $b_1 < b_2$  емкость среды с увеличением концентрации загрязнителей будет уменьшаться. В (3) предполагается, что емкость загрязненной среды не может быть меньше  $Kb_1/b_2$ . Этим учитывается то обстоятельство, что весь трофический ресурс в процессе загрязнения не уничтожается.

Загрязнители могут оказывать угнетающее давление на всю популяцию как единое целое [1]. При этом часть популяции может погибнуть от этого стрессового давления за счет падения рождаемости и увеличения смертности. В этом случае принимается, что скорость гибели части особей зависит от  $P$  так, что скорость роста численности популяции уменьшается на величину

$$\mu N \frac{c_1 P}{1 + c_2 P}, \quad (4)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – положительные параметры.

С учетом (2)-(4) модель (1) переходит в модель

$$\frac{dN}{dt} = N \mu \left( \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P} - \frac{N}{K} \frac{1 + b_2 P}{1 + b_1 P} \right) - \mu N \frac{c_1 P}{1 + c_2 P}. \quad (5)$$

В этой модели предполагается, что концентрация токсикантов в среде не изменяется – локальное добавление токсикантов незначительно по сравнению с накопленным количеством на длительном временном интервале эволюции популяции.

В качестве начального условия принимается, что

$$N(t = 0) = K.$$

При  $P=0$  устойчивой стационарной точкой уравнения (5) является  $N=K$ . Поэтому этот вариант начального условия предполагает, что поллютанты появляются в среде обитания популяции на момент достижения ее максимальной численности. То есть это соответствует началу внешнего воздействия на экологическую нишу популяции, вызванного проникновением человека в среду обитания природных популяций.

При малых значениях  $P$  с точностью до величин второго порядка малости уравнение (5) принимает вид

$$\frac{dN}{dt} = N\mu \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \mu N [(b_2 - b_1) + (a_2 - a_1) + c_1] P.$$

При выполнении неравенств  $a_1 < a_2$  и  $b_1 < b_2$ , скорость роста численности популяции начнет уменьшаться со сдвигом стационарного значения новой численности популяции в сторону его уменьшения.

Устойчивость стационарной точки  $N=0$  уравнения (5) определяется знаком функции

$$f(P) = \frac{1 + a_1 P}{1 + a_2 P} - \frac{c_1 P}{1 + c_2 P}.$$

При  $P=0$   $f(P)$  принимает положительное значение, а при  $P \rightarrow \infty$

$$f(P) \rightarrow \frac{a_1}{a_2} - \frac{c_1}{c_2}.$$

Поскольку  $f(P)$  монотонно убывающая функция, то при выполнении неравенства

$$\frac{a_1}{a_2} < \frac{c_1}{c_2} \tag{6}$$

найдутся такие значения  $P < P_*$ , при которых тривиальная стационарная точка будет устойчивой, а при  $P > P_*$  неустойчивой. Значение  $P_*$ , при котором  $f(P_*) = 0$ , является пороговым значением, при превышении которого правая

часть уравнения (5) станет отрицательной. Применительно к реальной популяции это соответствует началу ее гибели.

При выполнении неравенств  $f(P) > 0$  существует нетривиальная стационарная точка

$$\frac{N}{K} = \frac{1+b_1P}{1+b_2P} \left( \frac{1+a_1P}{1+a_2P} - \frac{c_1P}{1+c_2P} \right) = \frac{N_*}{K}. \quad (7)$$

Собственное значение «матрицы» Якоби в этой точке

$$\lambda = -\mu N_* \frac{1+b_2P}{K(1+b_1P)}$$

будет отрицательным и, соответственно, эта стационарная точка будет устойчивой.

При  $c_1 = 0$  стационарная точка  $N = 0$  является неустойчивой, а нетривиальная стационарная точка, определяемая из (7), будет устойчивой. То есть, в рамках модели (5) возможная гибель популяции при сильном антропогенном давлении обусловлена не изменениями плодовитости и рождаемости отдельных особей, а стрессовым давлением на всю популяцию.

В конкретном биоценозе существуют многочисленные популяции со своими удельными скоростями роста  $\mu$ , занимающие свою часть биоценоза емкостью  $K$ . В условиях равновесия одновременно существующих независимо друг от друга  $m$  популяций численность каждой будет совпадать с емкостью своей экологической ниши. То есть для всех популяций в устойчивом стационарном состоянии выполняется равенство  $N/K = 1$ . При наличии загрязнителей равновесие нарушается, поскольку изменяются и рождаемость, и смертность, и емкость среды. Изменится и численность популяции по отношению к исходной численности. Если считать, что загрязнители на каждую популяцию влияют индивидуально, то можно оценить распределение популяций по численности в измененных условиях обитания.

На рис. 1 приведено стационарное распределение 50 000 популяций по численности в условиях загрязнения среды обитания, для которых параметры, входящие в уравнение (5), выбирались случайным образом из диапазонов:  $a_1 \in [1,2]$ ,  $a_2 \in [2,4]$ ,  $b_1 \in [1,2]$ ,  $b_2 \in [2,4]$  и  $c_2 \in [1,2]$ ,  $c_1 \in [0.1,0.2]$ , а  $P=1$ . Этот набор параметров соответствует случаю отсутствия гибели хотя бы одной популяции: для любых  $P \geq 0$  выполняется неравенство  $f(P) \geq 0$ . При выборе случайным образом параметра  $c_1$  из диапазона  $[1,4]$  неравенство (6) может нарушаться, что соответствует возможной гибели части популяций в зависимости от концентрации загрязнителей (от параметра  $P$ ). На рис. 2 для такого выбора значений  $c_1$  отражено изменение численности выживших популяций в зависимости от параметра  $P$ .

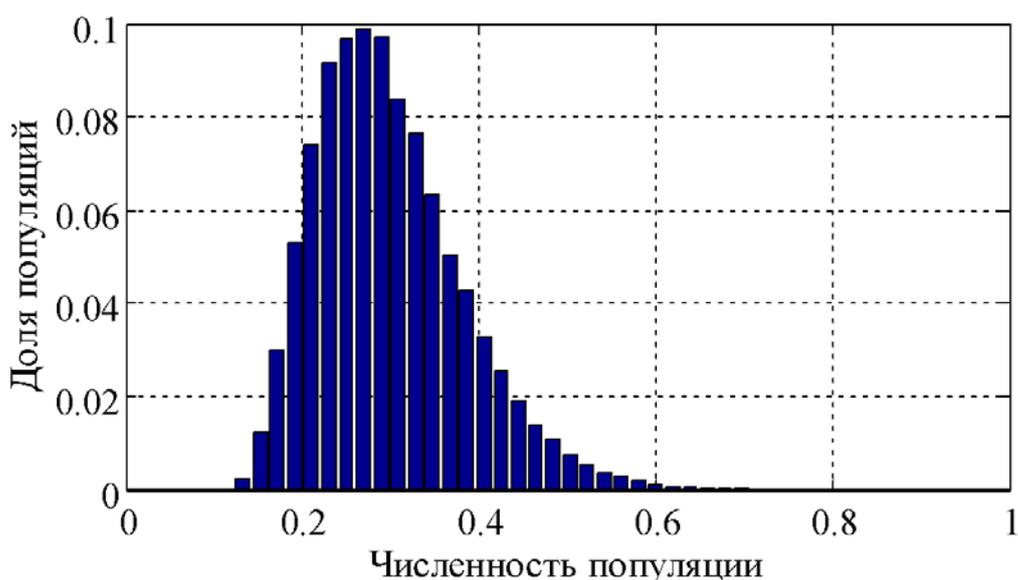


Рис. 1. Распределение популяций по численности в условиях антропогенного давления.\*

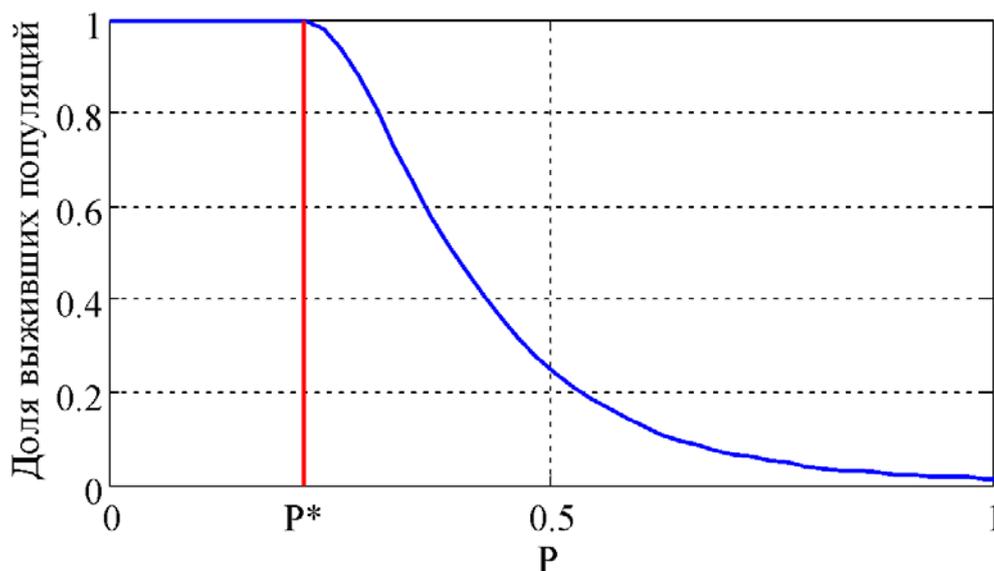


Рис. 2. Зависимость доли выживших популяций при антропогенном давлении от степени загрязнения\*

В динамике момент времени  $t = t_*$  достижения порогового значения  $P_*$  от момента начала загрязнения среды зависит не только от параметров  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ , но и от удельной скорости роста популяции  $\mu$  и скорости поступления токсичных поллютантов в среду обитания. Для случая динамики поступления загрязнителей в среду по закону  $P = P_\infty (1 - e^{-\gamma t})$  на рис. 3 отражено изменение числа выживших популяций на текущий момент времени. Принималось, что  $P_\infty = 10$ , а  $\mu$  выбиралось случайным образом из диапазона  $[1, 2]$  для 10 000 популяций. Пороговое время, по достижении которого начинается гибель части популяции, отмечено как  $t_*$ .

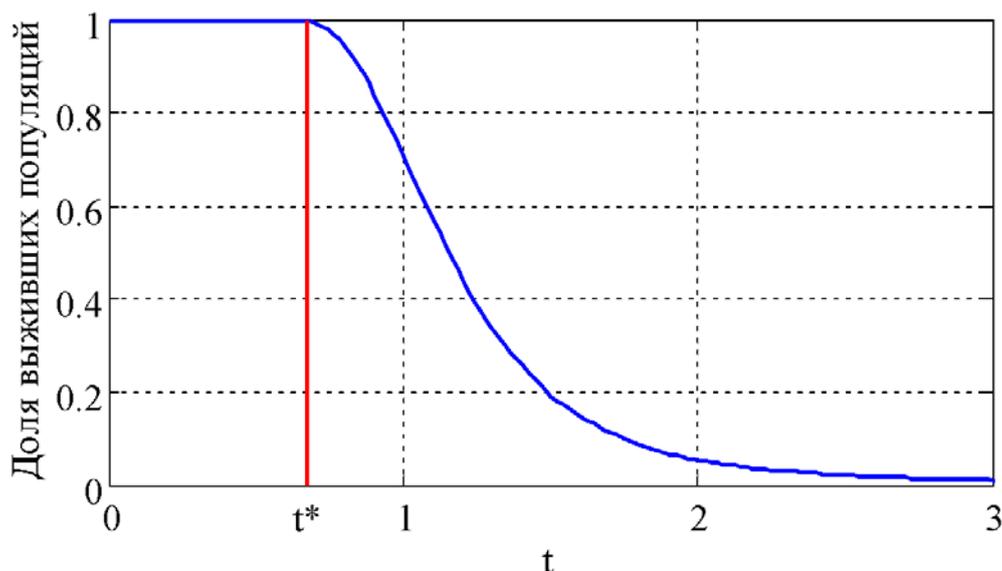


Рис. 3. Доля выживших популяций в зависимости от времени\*

В модели нестабильность среды обитания популяций вызвана антропогенным давлением. Кризисная ситуация моделируется снижением количества доступного ресурса, уменьшением рождаемости и повышением смертности. Межвидовые взаимодействия, такие как конкуренция, хищничество, протокооперация, не учитываются. Тем не менее, из этой модели следует, что нестабильность биоразнообразия при внешнем и внутреннем стрессовом давлении на популяции может быть вызвана как изменением внутреннего метаболизма организмов особей, так и перестройкой структуры популяций в целом. Разработанная модель позволяет объяснить и возможный вариант распределения различных видов по численности на территории, подверженной антропогенному воздействию, оценить потери биоразнообразия в зависимости от степени загрязнения территории, и временной интервал, на котором биоразнообразии может сохраниться.

\*Результаты, приведенные на рис. 1-3, получены авторами в рамках разработанных в статье моделей. Численная реализация осуществлялась в среде программирования математического пакета Matlab.

**Библиографический список:**

1. Алиева З.М. Кинетические параметры выживаемости дафний при загрязнении среды токсикантами / З.М. Алиева, А.А. Мунгиев, М.А. Мунгиева, А.Г. Юсуфов // Биология внутренних вод. 2010. № 3. С. 91-96.
2. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – Москва-Ижевск. Институт компьютерных технологий, 2003. 368 с.
3. Вернадский В.И. Биосфера и ноосфера / В.И. Вернадский. - М.: Айрис Пресс, 2002. 572 с.
4. Воробейчик Е.Л. Сезонная динамика пространственного распределения целлюлозолитической активности почвенной микрофлоры в условиях атмосферного загрязнения / Е.Л. Воробейчик // Экология. 2007. № 6. С. 427-437.
5. Девяткин П.Н. Природные водные ресурсы района г. Мончегорск в условиях функционирования ОАО "Кольская горно-металлургическая компания" / П.Н. Девяткин // Вестник МГТУ. – 2008. – Т. 11. №3. С. 393-397.
6. Касиков А.Г. Пылевые выбросы медно-никелевого производства и последствия их воздействия на организм человека в условиях Крайнего Севера / А.Г. Касиков // Вестник Кольского научного центра РАН. – 2017. № 10. С. 58-63.
7. Колпак Е.П. Математические модели одиночной популяции: учебное пособие / Е.П. Колпак, Е.А. Ефремова. - Казань: Изд-во «Бук», 2017. – 122 с.
8. Крылов А. К. Единство популяции как способ выживания в нестабильной среде / А.К. Крылов, А.В. Марков, Ю.И. Александров // Журнал общей биологии. – 2020. – Т. 81. № 3. с. 194–207. DOI: 10.31857/S0044459620030057.

9. Моисеенко Т. И. Биодоступность и экотоксичность металлов в водных системах: критические уровни загрязнения / Т.И. Моисеенко // Геохимия. – 2019. Т. 64. № 7. С. 675–688. DOI: 10.31857/S0016-7525647675-688.

10. Мухачева С.В. Химическое загрязнение среды: тяжелые металлы в пище мелких млекопитающих / С.В. Мухачева. В.С. Безель // Зоологический журнал. 2007. Т. 86. № 4. С.492-498.

11. Пегов А.С. Антропогенное воздействие на биосферу / А.С. Пегов // Труды ИСА РАН. 2009. Т. 42. С. 5-32.

*Оригинальность 88%*