УДК: 512.643.532

О МЕТОДАХ ОТЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Дубограй И.В.,

доцент,

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, (национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Чуев В.Ю.

кандидат технических наук, доцент

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана

(национальный исследовательский университет)

Москва, Россия

Аннотация. Предлагается не описанный в классической учебной литературе метод нахождения собственных векторов линейного оператора. Доказаны теоремы, устанавливающие правомерность этого метода. Показано, что предлагаемый метод в большинстве случаев более экономичен по сравнению с традиционным.

Ключевые слова: линейный оператор, собственное значение, собственный вектор, присоединённая матрица.

ON METHODS FOR FINDING EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF A LINEAR OPERATOR

Dubograi I. V.,

Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Chuev V. Yu.,

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

Annotation. A method for finding eigenvectors of a linear operator that is not described in classical educational literature is proposed. The theorems establishing the validity of this method are proved. It is shown that the proposed method is in most cases more economical than the traditional one.

Keywords: linear operator, eigenvalue, eigenvector, attached matrix.

Введение. Одним из важнейших в курсе линейной алгебры в технических университетах является раздел о нахождении собственных значений и собственных векторов линейного оператора. Эти понятия используются во многих разделах курса высшей математики, а также в курсах теоретической механики, физики и других. Стандартным способом отыскания собственных значений и собственных векторов линейного оператора является следующая цепочка действий. [1 – 3]

В линейном n- мерном пространстве выбирается базис, в котором составляется матрица A линейного оператора $\tilde{A}$. Ненулевой вектор $\overline{x}$ называется собственным вектором этого оператора, если существует действительное число λ, такое что $\tilde{A}\overline{x} = \lambda\overline{x}$. При этом λ называется собственным значением этого линейного оператора.

Решается характеристическое уравнение

$$\left|A - \lambda E\right| = 0,$$

где E - единичная матрица. Полученные при этом решения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ являются собственными значениями линейного оператора.

Далее для каждого собственного значения $\lambda_i, i = 1, 2, ..., k$ составляется однородная система алгебраических уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$\left(A - \lambda_i E\right) X = 0,$$

где $X=\left(x_1\,x_2...x_n\right)^T$ - матрица – столбец из координат искомого собственного вектора в выбранном базисе.

Так как $\det\left(A-\lambda_i E\right)=0$, то согласно одной из теорем алгебры, эта система имеет ненулевое решение $X\neq 0$, которое соответствует искомому собственному вектору $\overline{x}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$. В случае, когда характеристическое уравнение имеет только простые корни, то есть $\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j$, приходится решать k таких систем.

Описание второго способа отыскания собственных векторов линейного оператора. Для случая простых корней характеристического уравнения предлагается другой способ нахождения собственных векторов, который является более экономичным, чем традиционный. Для начала приведём его теоретическое обоснование.

Напомним, что присоединённой для квадратной матрицы $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times n}$ называется матрица $B^*=\left(B_{ji}\right)_{n\times n}$, элементами столбцов которой являются алгебраические дополнения элементов соответствующих строк матрицы B.

Теорема 1. Если λ_0 - простой корень характеристического уравнения $\left|A-\lambda E\right|=0$, то присоединенная матрица $\left(A-\lambda E\right)^*$содержит хотя бы один ненулевой столбец.

Доказательство. Допустим, что все элементы присоединенной матрицы равны нулю, то есть алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$\left(A-\lambda E\right)=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

равны нулю.

Алгебраические дополнения являются минорами $(n-1)$ - ого порядка матрицы и равенство всех их нулю влечет за собой вывод о том, что ранг матрицы $(A-\lambda_0 E)$ не больше, чем $r=n-2$. В этом случае координаты искомого собственного вектора, соответствующего λ_0, удовлетворяют ОСЛАУ $(A-\lambda_0 E)X_0=0$, общее решение которой содержит не меньше двух линейно независимых частных решений, соответствующих собственным векторам для λ_0.

Так, если $r=Rang(A-\lambda_0 E)=n-2$, то по теореме о структуре общего решения неопределенной ОСЛАУ это общее решение имеет вид $X=C_1X_1+C_2X_2$. Причем X_1, X_2 - линейно независимые частные решения ОСЛАУ, которые соответствуют двум собственным векторам $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ для λ_0, линейно независимым между собой.

Получили следующий вывод. Если все алгебраические дополнения элементов присоединенной матрицы равны нулю, то собственному значению λ_0 отвечает не менее двух собственных линейно независимых векторов. Это противоречит теореме о том, что геометрическая кратность не превышает алгебраической кратности собственного значения. То есть, если λ_0- простой корень характеристического уравнения, то ему может соответствовать только один собственный вектор. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно, допущение неверно.

Теорема 2. Если определитель квадратной матрицы A равен нулю $(\det A=0)$, то любой столбец X присоединенной к A матрицы A^* удовлетворяет уравнению $AX=0$, где 0 – нулевой столбец.

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ и $X=\begin{pmatrix} A_{i1} \\ A_{i2} \\ \dots \\ A_{in} \end{pmatrix}$ - i-ый столбец матрицы A^*. Вычислим произведение $AX=B$ при условии $\det A=0$.

Каждый элемент матрицы B при этом равен $b_j=\sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik}$.

Имеют место следующие свойства определителя: сумма произведений элементов строки определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю, а сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

Таким образом, при $j=i$ получаем $b_j=\det A=0$ по условию, и при $j\neq i$ также $b_j=0$. То есть, $AX=B=0$.

Следствие. Если λ_0 - корень характеристического уравнения $\det\left(A-\lambda E\right)=0$, то присоединённая матрица $\left(A-\lambda_0 E\right)^*$ содержит хотя бы один ненулевой столбец, элементами которого являются координаты собственного вектора соответствующего линейного оператора A^*.

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2, матрица $\left(A-\lambda_0 E\right)^*$ имеет хотя бы один ненулевой столбец X, который удовлетворяет уравнению $\left(A-\lambda_0 E\right)X=0$, где λ_0 - собственное значение линейного оператора $\tilde{A}$.

Получаем $AX=\lambda_0 X$, что соответствует равенству $\tilde{A}\overline{x}=\lambda_0\overline{x}$, а это означает, что вектор $\overline{x}=\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)$ является собственным вектором линейного оператора, соответствующим собственному значению λ_0.

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора состоит в следующем.

1.Составляем характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, где A- матрица линейного оператора в некотором базисе n – мерного пространства.

2.Если есть простые корни этого уравнения, то составляем присоединённую матрицу $(A-\lambda E)^{*}$.

3.Поочерёдно подставляя в один из столбцов этой матрицы соответствующее собственное значение, находим матрицу – столбец, которая соответствует искомому собственному вектору. Как правило, достаточно составить один столбец матрицы $(A-\lambda E)^{*}$. Но если выбранный столбец окажется нулевым, подставляем собственное значение в другой столбец матрицы.

Пример. Найдём собственные векторы линейного оператора, имеющего в некотором базисе линейного пространства матрицу $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и вычислим его корни.

$$|A-\lambda E|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=-2.$$

Так как все корни имеют кратность 1, т.е. являются простыми, найдём собственные векторы, им соответствующие, используя присоединённую матрицу $(A-\lambda E)^{*}$. Составим первый столбец этой матрицы и по очереди подставим в него найденные собственные значения. Если для какого – нибудь λ_i получим нуль – вектор, то учитывая, что по определению собственный вектор не должен быть нулевым, составим другой столбец и подставим это число в него.

$$(A-\lambda E)^{*}=\begin{pmatrix} \lambda^2-\lambda & * & * \\ -2+2\lambda & * & * \\ -2+\lambda & * & * \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Каждая матрица – столбец соответствует собственному вектору.

Ответ: $\lambda_1 = 1, \overline{x}_1 = (0,0,1),$
$\lambda_2 = 2, \overline{x}_2 = (1,1,0),$
$\lambda_3 = -2, \overline{x}_3 = (3,-3,-2).$

Заключение. Несомненным достоинством приведённого метода является его экономичность по сравнению со стандартным методом отыскания собственных векторов линейного оператора. Эти методы удобно комбинировать при решении задачи, в которой часть корней характеристического уравнения являются простыми, и собственные векторы, им соответствующие, могут быть найдены с помощью присоединённой матрицы, а остальные корни – кратные, и для них собственные векторы необходимо искать традиционным способом.

Библиографический список

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 304 с.
2. Ильин В.А. Линейная алгебра. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 278 с.
3. Канатников А.Н. Линейная алгебра / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. - 336 с.

Оригинальность 75%