УДК 514.16

РАССЛОЕНИЯ АЛГЕБРЫ ПЛЮРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ВТОРОГО ТИПА

Тришина Н. Е.,

к. ф.-м. н., доцент,

Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева,

Москва, Россия

Тришин В. Н.,

к. ф.-м. н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

Россия, Москва

Аннотация

В настоящей статье рассматриваются расслоения, которые определяются алгеброй плюральных чисел четвертого порядка. Расслоения получаются при разбиении группы Ли обратимых элементов алгебры на левые смежные классы по ее подгруппам. С помощью этого метода найдены два расслоения. В статье установлена естественная связь расслоений с ассоциативными алгебрами. Найдены аналоги хорошо известного расслоения Хопфа, которое можно получить, как расслоение алгебры кватернионов.

Ключевые слова: ассоциативная унитальная алгебра, главное расслоение, факторгруппа.

BUNDLES OF THE ALGEBRA OF PLURAL NUMBERS OF THE FOURTH ORDER

Trishina N.E.

PhD, Associate Professor, D.Mendeleev University of Chemical Technology of Russia, Moscow, Russia

Trishin V.N.

PhD, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University Moscow, Russia

Abstract

In this article, we consider bundles that are defined by the algebra of plural numbers of the fourth order. Bundles are obtained by partitioning the Lie group of invertible elements of an algebra into left cosets by its subgroups. Using this method, two bundles are found. The article establishes a natural connection between bundles and associative algebras. Analogs of the well-known Hopf bundle are found, which can be obtained as a bundle of the quaternion algebra.

Key words: associative unital algebra, principal bundle, quotient group.

Пространствам над алгебрами посвящены многие работы Казанской геометрической школы. Большой вклад в изучение биаксиальных и связанных с ними пространств внес Норден и его ученики. В дальнейшем это понятие было обобщено А.П.Широковым [1], [2]. Б.Н.Шапуков и его ученики изучали геометрические структуры, возникающие при проективизации алгебр и их расслоений [3], [4], [5],[10].

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная унитальная алгебра размерности n, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — множество ее обратимых элементов. Это открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и операции умножения и взятия обратного элемента являются гладкими функциями. Поэтому $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — группа Ли по умножению.

Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — множество обратимых элементов $\mathfrak{B}$. $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ по умножению и замкнутое подмножество, поэтому $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа Ли.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Тогда расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{B}})$, где π — каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой $\widetilde{\mathfrak{B}}$ [14]. Доказано, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра кватернионов, это главное расслоение изоморфно расслоению Хопфа [4], [5].

Исходя из такого подхода, нами рассмотрены все алгебры размерностей 3 и 4 и получены расслоения этих алгебр над фактормножествами $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ смежных классов. Большинство получающихся расслоений тривиально. Показано, что только в 12 случаях для алгебр размерности 4 и в одном случае для алгебр размерности 3 расслоения локально тривиальны, но не тривиальны. Приведем подробное описание расслоений для неприводимой алгебрыплюральных чисел четвертого порядка.

Рассмотрим коммутативную алгебру плюральных чисел $\mathfrak{A} = \mathbb{R}(\varepsilon^3)$ с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3	0
e_2	e_2	e_3	0	0
e_3	e_3	0	0	0

Найдем 2-подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, содержащие единицу. Пусть $\{g_0, g_1\}$ — базис унитальной 2-подалгебры $\mathfrak{B}$, где $g_0 = e_0 = 1,\ g_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Тогда

$$g_1^2 = a(ae_2 + 2be_3).$$

Следовательно, если $a = 0$, $\mathfrak{B}$ — 2-подалгебра, изоморфная алгебре дуальных чисел $\mathbb{R}$ (ε). Если $a \neq 0$, то g_1^2 нельзя выразить через g_0 и g_1, поэтому $\mathfrak{B}$ не является 2-подалгеброй.

Найдем унитальные 3-подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — 3-подалгебра с базисом $\{g_0,\ g_1,\ g_2\}$, и $g_0 = e_0,\ g_1 = ae_1 + be_2 + ce_3$. Тогда

$$g_1^2 = a(ae_2 + 2be_3).$$

Следовательно, если $a \neq 0$, так как g_1^2 не выражается через g_0 и g_1, чтобы $\mathfrak{B}$ была подалгеброй, будем считать $g_3 = ae_2 + 2be_3$. Тогда

$$g_1 g_2 = (ae_1 + be_2 + ce_3)(ae_2 + 2be_3) = a^2 e_3.$$

Поэтому элементы $\{e_0,\ ae_1 + be_2 + ce_3\}$, $a \neq 0$, порождают всю алгебру $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ не является 3-подалгеброй.

Пусть $a = 0$. Тогда за базис подалгебры $\mathfrak{B}$ можно взять $\{e_0,\ e_2,\ e_3\}$. В этом случае подалгебра $\mathfrak{B}$ изоморфна алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ плюральных чисел размерности 3. Следовательно, справедлива

Лемма 1 *В алгебре* $\mathfrak{A}$ *имеется пучок 2-подалгебр* $\{e_0, be_2 + ce_3\}$*, изоморфных алгебре* $\mathbb{R}(\varepsilon)$ *дуальных чисел. Алгебра* $\mathfrak{A}$ *содержит единственную 3-подалгебру* $\{e_0, e_2, e_3\}$*, изоморфную алгебре* $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ *плюральных чисел размерности 3.*

Для $x = x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$ найдем обратный элемент $y = x^{-1}$.

$$xy = x^0 y^0 + (x^1 y^0 + x^0 y^1)e_1 +$$
$$+(x^2 y^0 + x^1 y^1 + x^0 y^2)e_2 + (x^3 y^0 + x^1 y^2 + x^2 y^0)e_3 = 1,$$

поэтому

$$\begin{cases} x^0 y^0 & = & 1, \\ x^2 y^0 + x^1 y^1 + x^0 y^2 & = & 0, \\ x^3 y^0 + x^1 y^2 + x^2 y^0 & = & 0. \end{cases}$$

Тогда, решая систему, получим

$$x^{-1} = \frac{1}{(x^0)^2}(x^0 - x^1 e_1 - x^2 e_2 - x^3 e_3) + \frac{(x^1)^2}{(x^0)^3} e_2 + \frac{2x^0 x^1 x^2 - (x^1)^3}{(x^0)^4} e_3 \ .$$

Поэтому множество обратимых элементов имеет вид

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \ | x^0 \neq 0,\ x^i \in \mathbb{R} \ \} \ .$$

Оно образует группу Ли, состоящую из двух связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_2)$ с базисом $\{e_0,\ e_2\}$, изоморфную алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел. Множество обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_2) = \{\lambda = a + b e_2 \ | \ a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без прямой. Любой элемент алгебры $\mathfrak{A}$ можно представить в виде

$$x = x^0 + x^2 e_2 + (x^1 + x^3 e_2) e_1 = z^0 + z^1 e_1.$$

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2)$. Вычислим произведение

$$(a + b e_2)[x^0 + x^2 e_2 + (x^1 + x^3 e_2) e_1] = \lambda(z^0 + z^1 e_1) = \lambda z^0 + \lambda z^1 e_1.$$

Следовательно, любой смежный класс однозначно определяется парой z^0, z^1 элементов из $\mathbb{R}(e_2)$ с точностью до множителя из $\mathbb{R}(e_2)$, и z^0 — обратим. Поэтому фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2)$ диффеоморфно плоскости $\mathbb{R}^2$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}^2$$

может быть записана в виде

$$\pi(z^0 + z^1 e_1) = \frac{z^1}{z^0}. \qquad (1)$$

Так как $\mathbb{R}(e_2)$ — нормальный делитель $\widetilde{\mathfrak{A}}$, фактормножество является группой. Найдем групповую операцию

$$\pi(xy) = \Big(\frac{x^1 y^0 + x^0 y^1}{x^0 y^0},$$

$$\frac{x^0 y^0 (x^3 y^0 + x^2 y^1 + x^1 y^2 + x^0 y^1) - (x^1 y^0 + x^0 y^1)(x^2 y^0 + x^1 y^1 + x^0 y^2)}{(x^0 y^0)^2}\Big) =$$

$$= ((\pi^0(x) + \pi^0(y)), (\pi^1(x) + \pi^1(y) - \pi^0(x)\pi^0(y)(\pi^0(x) + \pi^0(y)))).$$

Нейтральным элементом является 0.

Прообраз точки $z \in \mathbb{R}^2$ при отображении π есть смежный класс. Поэтому расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2)$ имеет типовой слой, диффеоморфный 2-плоскости без прямой.

Рассмотрим отображение тривиализации

$$\varphi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\ \ (e_2),\quad \varphi(z^0 + z^1 e_1) = \left(\frac{z^1}{z^0},\ z^0\right).$$

Тогда его обратное

$$\varphi^{-1}(z,\ \lambda) = \lambda(1 + z e_1).$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2)$, *определяемое формулой (1), является главным тривиальным расслоением над группой* $\mathbb{R}^2$ *с типовым слоем, диффеоморфным* $\mathbb{R}\ \ (e_2)$. *Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}(e_2)$.

2. Рассмотрим 3-подалгебру $\mathbb{R}(e_2, e_3)$ с базисом $\{e_0,\ e_2,\ e_3\}$, изоморфную алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon^2)$ плюральных чисел. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_2,\ e_3) = \{a + b e_2 + c e_3\ \mid\ a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без 2-плоскости.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2,\ e_3)$. Вычислим произведение

$$(a + b e_2 + c e_3)(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) =$$
$$= a x^0 + a x^1 e_1 + (a x^2 e_2 + b x^0) e_2 + (a x^3 + b x^1 + c x^0) e_3.$$

Следовательно, смежный класс определяется парой вещественных чисел x^0 и x^1 с точностью до ненулевого вещественного множителя, причем $x^0 \neq 0$. Поэтому фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2,\ e_3)$ диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$, а каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}$$

может быть записана в виде

$$\pi(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = \frac{x^1}{x^0}. \qquad (2)$$

Так как

$$\pi(xy) = \frac{x^1y^0 + x^0y^1}{x^0y^0} = \pi(x) + \pi(y),$$

значит фактормножество является аддитивной группой.

Прообраз точки $x \in \mathbb{R}$ при отображении π есть смежный класс. Поэтому расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$ имеет типовой слой, гомеоморфный 3-плоскости без 2-плоскости.

Рассмотрим отображение тривиализации

$$\varphi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}(e_2,\ e_3), \quad \varphi(x^ie_i) = \left(\frac{x^1}{x^0},\ x^0 + x^2e_2 + \frac{x^0x^3 - x^1x^2}{x^0}e_3\right).$$

Тогда его обратное имеет вид

$$\varphi^{-1}(x,\ a + be_2 + ce_3) = (a + be_2 + ce_3)(1 + xe_1).$$

Следовательно, справедлива

Теорема 2 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$*, определяемое формулой (2), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой* $\mathbb{R}$ *с типовым слоем, диффеоморфным* $\mathbb{R}(e_2,\ e_3)$. *Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}(e_2,\ e_3)$.

Таким образом, в настоящей статье показано, что расслоения, порождаемые алгеброй плюральных чисел, тривиальны. Перечислены все типы подалгебр данной алгебры.

Библиографический список:

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. Казань: изд. КГУ, 1985, 262 с.

2. Shirokov A.P. Spaces over Algebras and Their Applications// *Journal of Mathematical Sciences*. 2002. Vol. 108, issue 2. P. 232-248. DOI: 10.1023/A:1012896320320

3. Шапуков Б.Н. Расслоения неевклидова 3-пространства гиперболического типа, порожденные алгеброй антикватернионов. I //*Ученые записки казанского государственного университета.* Т. 147, кн. 1. 2005, С. 181-191.
4. Белова Н.Е. Аналоги расслоения Хопфа// "Всероссийская молодежная научная школа-конференция по мат. моделированию, геометрии и алгебре." (Казань, декабрь 1994 г.): матер.Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 1994, С. 169-174.
5. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, определяемые ассоциативными унитальными алгебрами размерности 3 и 4.// *Инженерный вестник.* , 2017, 11 С. 3.
6. Kuzmina I., Mikes J. On pseudoconformal models of fibrations determined by algebra of antiquaternions and projectivization of them.// Annales mathematicae et informaticae. 2013. no 42. P.57-64.
7. Rosefeld B. Geometry of Lie groups. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer academic publishers. 1997. 393 p.
8. Study E., Cartan E. Nombers complexes// Encyclopedie des sciences mathematiques pures et appliquees. 1908. t. 1. Vol. 1. 329–468.
9. Белова Н.Е. Расслоения, определяемые ассоциативными алгебрами: дисс. ... канд. ф.-м. наук. Казань, КГУ, 2001. 128 с.
10. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988, 496 с.

Оригинальность 84%