УДК 514.16

О РАССЛОЕНИЯХ НЕПРИВОДИМОЙ АЛГЕБРЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ВТОРОГО ТИПА

Тришина Н. Е.,
к. ф.-м. н., доцент,
Российский химико-технологический университет им. Д.И. Менделеева,
Москва, Россия

Тришин В. Н.,
к. ф.-м. н., доцент,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
Россия, Москва

Аннотация
В настоящей статье рассматриваются расслоения, которые определяются алгеброй четвертого порядка второго типа по классификации Штуди. Расслоения получаются при разбиении группы Ли обратимых элементов алгебры на левые смежные классы по ее подгруппам. С помощью этого метода найдены пять расслоений. Они определяются двумя подалгебрами второго порядка и тремя подалгебрами третьего порядка. В статье продолжено исследование аналогов хорошо известного расслоения Хопфа. Показана связь структуры ассоциативной алгебры и расслоений.

Ключевые слова: ассоциативная унитальная алгебра, главное расслоение, факторгруппа.

ON BUNDLES OF AN IRREDUCIBLE ALGEBRA OF DIMENSION 4 OF THE SECOND TYPE

Trishina N.E.

PhD, Associate Professor, D.Mendeleev University of Chemical Technology of Russia, Moscow, Russia

Trishin V.N.

PhD, Associate Professor, Bauman Moscow State Technical University Moscow, Russia

Abstract

In this article, we consider bundles that are defined by a fourth-order algebra of the second type according to the Study's classification. Bundles are obtained by partitioning the Lie group of invertible elements of an algebra into left cosets by its subgroups. Using this method, five bundles were found. They are defined by two second-order subalgebras and three third-order subalgebras. This article continues the study of analogues of the well-known Hopf bundle. The connection between the structure of associative algebra and bundles is shown.

Key words: associative unital algebra, principal bundle, quotient group.

Пространствам над алгебрами посвящены многие работы Казанской геометрической школы. Большой вклад в изучение биаксиальных и связанных с ними пространств внес Норден и его ученики. В дальнейшем это понятие было обобщено А.П.Широковым [1], [2]. Б.Н.Шапуков и его ученики изучали геометрические структуры, возникающие при проективизации алгебр и их расслоений [3], [4], [5],[10].

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная унитальная алгебра размерности n, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — множество ее обратимых элементов. Это открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и операции умножения и взятия обратного элемента являются гладкими функциями. Поэтому

$\widetilde{\mathfrak{A}}$ — группа Ли по умножению.

Пусть $\mathfrak{B}$ — унитальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — множество обратимых элементов $\mathfrak{B}$. $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ по умножению и замкнутое подмножество, поэтому $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — подгруппа Ли.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ правых смежных классов. Тогда расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}}, \pi, \widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathbb{B}})$, где π — каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой $\widetilde{\mathfrak{B}}$ [14]. Доказано, что в случае, когда $\mathfrak{A}$ есть алгебра кватернионов, это главное расслоение изоморфно расслоению Хопфа [4], [5].

Исходя из такого подхода нами рассмотрены все алгебры размерностей 3 и 4 и получены расслоения этих алгебр над фактормножествами $\widetilde{\mathfrak{A}}/\widetilde{\mathfrak{B}}$ смежных классов. Большинство получающихся расслоений тривиально. Показано, что только в 12 случаях для алгебр размерности 4 и в одном случае для алгебр размерности 3 расслоения локально тривиальны, но не тривиальны. Приведем подробное описание расслоений для неприводимой алгебры четвертого порядка типа II по классификации Штуди.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{A}$ с таблицей умножения

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_0	e_2	e_3
e_2	e_2	$-e_2$	0	0
e_3	e_3	e_3	0	0

Для алгебры $\mathfrak{A}$ можно показать, что справедлива

Лемма 1 *В алгебре $\mathfrak{A}$ имеется пучок унитальных 2-подалгебр $\{e_0, ae_1 + be_3\}$, изоморфных алгебре $\mathbb{R}(e)$ двойных чисел и пучок 2-подалгебр $\{e_0, ae_2 + be_3\}$,* *изоморфных алгебре* $\mathbb{R}(\varepsilon)$ *дуальных чисел. Алгебра* $\mathfrak{A}$ *содержит 3-подалгебру* $\{e_0, e_1, e_3\}$*, изоморфную прямой сумме* $\mathbb{R}(\varepsilon) \oplus \mathbb{R}$*, пучок 3-подалгебр* $\{e_0, e_1 + ae_3, e_2\}$ *типа II и единственную 3-подалгебру* $\{e_0, e_2, e_3\}$*, изоморфную 3-алгебре типа III по классификации Штуди.*

Пусть $x = x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$. Тогда

$$x^{-1} = \frac{x^0 - x^1 e_1}{(x^0)^2 - (x^1)^2} - \frac{x^2 e_2 + x^3 e^3}{(x^0 + x^1)^2}.$$

Поэтому множество обратимых элементов

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \mid (x^0)^2 - (x^1)^2 \neq 0,\ x^i \in \mathbb{R}\}.$$

образует группу Ли, состоящую из четырех связных компонент.

1. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_1)$, изоморфную алгебре $\mathbb{R}(e)$ двойных чисел, с базисом $\{e_0,\ e_1\}$. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1) = \{a + b e_1 \mid a^2 - b^2 \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 2-плоскость без пары пересекающихся прямых. Рассмотрим факторможество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1)$ правых смежных классов. Оно диффеоморфно 2-плоскости $\mathbb{R}^2$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}^2,$$

$$\pi(x^0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3) = \left(\frac{x^2}{x^0 + x^1}, \frac{x^3}{x^0 + x^1}\right) \qquad (1)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2)$ с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без пары пересекающихся прямых.

Справедлива

Теорема 1 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2)$*, определяемое формулой (1), является главным тривиальным расслоением с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без пары пересекающихся прямых. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}(e_1)$.

2. Рассмотрим 2-подалгебру $\mathbb{R}(e_2)$, изоморфную алгебре $\mathbb{R}(\varepsilon)$ дуальных чисел, с базисом $\{e_0,\ e_2\}$. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_2) = \{a + be_2\ |a \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2)$ правых смежных классов. Оно диффеоморфно $\mathbb{R}^2\backslash\{x = 0\} = \mathbb{R}^2_{00}$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}^2_{00},$$

$$\pi(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = \left(\frac{x^0+x^1}{x^0-x^1}, \frac{x^3}{x^0-x^1}\right). \tag{2}$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2_{00})$ с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. База этого расслоения является группой с групповой операцией

$$\alpha \circ \beta = (\alpha^0\beta^0, \alpha^1\beta^0 + \alpha^0\beta^1)$$

и нейтральным элементом $(1,0)$. Справедлива

Теорема 2 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}^2_{00})$*, определяемое формулой (2), является главным тривиальным расслоением над группой* $\mathbb{R}_{00}$ *с типовым слоем, диффеоморфным 2-плоскости без прямой. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}^2_{00} \times \mathbb{R}(e_2)$

3. Рассмотрим подалгебру $\mathbb{R}(e_1, e_2)$ с базисом $(e_0,\ e_1,\ e_2)$, изоморфную алгебре типа II. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1, e_2) = \{a + be_1 + ce_2\ |\ a^2 - b^2 \neq 0\}$$

есть подгруппа Ли и нормальный делитель группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$ 3-плоскость без пары пересекающихся 2-плоскостей.

Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1, e_2)$ правых смежных классов. Оно является аддитивной группой и диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi: \widetilde{\mathfrak{A}} \to \mathbb{R}$$

$$\pi(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = \frac{x^3}{x^0+x^1}. \tag{3}$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 3 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$, *задаваемое формулой (3), является главным тривиальным расслоением над аддитивной группой* $\mathbb{R}$ *с типовым слоем, диффеоморфным 3-пространству без пары пересекающихся 2-плоскостей. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}(e_1,e_2)$.

4. Рассмотрим 3-подалгебру $\mathbb{R}(e_1,\ e_3)$ с базисом $\{e_0,\ e_1,\ e_3\}$, изоморфную прямой сумме $\mathbb{R}(\varepsilon)\oplus\mathbb{R}$. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_1,e_3)=\{a+be_1+ce_3\ |\ a^2-b^2\neq 0\}$$

есть подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 3-пространство без пары пересекающихся 2-плоскостей. Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_1,e_3)$. Оно диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$. Каноническая проекция

$$\pi\colon\widetilde{\mathfrak{A}}\to\mathbb{R},$$

$$\pi(x^0+x^1e_1+x^2e_2+x^3e_3)=\frac{x^2}{x^0+x^1} \qquad (4)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$. Справедлива

Теорема 4 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R})$, *задаваемое формулой (4) является главным тривиальным расслоением с типовым слоем, диффеоморфным 3-пространству без пары пересекающихся плоскостей. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}(e_1,e_3)$.

5. Рассмотрим подалгебру $\mathbb{R}(e_2,e_3)$ с базисом $\{e_0,\ e_2,\ e_3\}$, изоморфную алгебре типа III. Множество ее обратимых элементов

$$\mathbb{R}(e_2,e_3)=\{a+be_2+ce_3\ |\ a\neq 0\}$$

есть подгруппа Ли группы $\widetilde{\mathfrak{A}}$, 3-плоскость без 2-плоскости. Рассмотрим фактормножество $\widetilde{\mathfrak{A}}/\mathbb{R}(e_2,e_3)$ правых смежных классов. Оно является мультипликативной группой и дифеоморфно прямой без точки $\mathbb{R}_0$. Каноническая проекция

$$\pi\colon\widetilde{\mathfrak{A}}\to\mathbb{R}_0,$$

$$\pi(x^0 + x^1e_1 + x^2e_2 + x^3e_3) = \frac{x^0+x^1}{x^0-x^1} \qquad (5)$$

задает расслоение $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}_0)$. Справедлива

Теорема 5 *Расслоение* $(\widetilde{\mathfrak{A}},\ \pi,\ \mathbb{R}_0)$, *определяемое формулой (5) является главным тривиальным расслоением над мультипликативной группой* $\mathbb{R}$ *с типовым слоем, диффеоморфным 3-пространству без 2-плоскости. Следовательно,* $\widetilde{\mathfrak{A}}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}(e_2, e_3)$.

Таким образом, в настоящей статье показано, что алгебра типа II, порождает пять тривиальных расслоений, соответствующий пяти типам ее подалгебр.

Библиографический список:

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами. - Казань: изд. КГУ, 1985, 262 с.

2. Shirokov A.P. Spaces over Algebras and Their Applications// *Journal of Mathematical Sciences*. 2002. Vol. 108, issue 2. P. 232-248. DOI: 10.1023/A:1012896320320

3. Шапуков Б.Н. Расслоения неевклидова 3-пространства гиперболического типа, порожденные алгеброй антикватернионов. I //*Ученые записки казанского государственного университета.* Т. 147, кн. 1. 2005, С. 181-191.

4. Белова Н.Е. Аналоги расслоения Хопфа// "Всероссийская молодежная научная школа-конференция по мат. моделированию, геометрии и алгебре." (Казань, декабрь 1994 г.): матер.Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 1994, С. 169-174.

5. Тришина Н.Е., Тришин В.Н. Расслоения, определяемые ассоциативными унитальными алгебрами размерности 3 и 4// *Инженерный вестник*. - 2017. - №11. - С. 3.

6. Kuzmina I., Mikes J. On pseudoconformal models of fibrations determined by algebra of antiquaternions and projectivization of them// Annales mathematicae et informaticae. 2013. no 42. P.57-64.

7. Rosefeld B. Geometry of Lie groups. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer academic publishers. 1997. 393 p.

8. Study E., Cartan E. Nombers complexes// Encyclopedie des sciences mathematiques pures et appliquees. 1908. t. 1. Vol. 1. 329–468.

9. Белова Н.Е. Расслоения, определяемые ассоциативными алгебрами: дисс. ... канд. ф.-м. наук. Казань, КГУ, 2001. 128 с.

10. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1988, 496 с.

Оригинальность 83%