УДК 519.85

ПОДХОДЫ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ МЕТОДОВ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ МОНОТОННЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Киселев В.В.
к.т.н., доцент,
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

Аннотация
В данной статье предлагается использовать критические Парето-оптимальные точки при решении задач большой размерности для сокращения количества вычислений. На примере показано, что выбор агрегированных переменных существенно влияет на структуру множества Парето-оптимальных решений.
Ключевые слова: математическое программирование, оптимальность по Парето, декомпозиция задач большой размерности, сложные технические системы, большая размерность.

APPROACHES TO THE USE OF DECOMPOSITION METHODS FOR MONOTONIC OBJECTIVE FUNCTIONS

***Kiselev V. V*.**
Ph. D., associate Professor, Bauman
Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

Annotation
This article proposes the use of critical Pareto-optimal points in solving problems of large dimension to reduce the number of calculations. The example shows that the

selection of aggregated variables significantly affects the structure of a set of Pareto-optimal solutions.

Keywords: mathematical programming, Pareto optimality, decomposition of problems of large dimension, complex technical systems, large dimension.

Будем рассматривать задачи оптимального проектирования, в которых уже построена модель сложной технической системы и с помощью этой модели можно вычислять значения глобального критерия $F(x)$ оценки системы. Здесь x – варьируемые конструктивные параметры, которые принадлежат замкнутому ограниченному и связному множеству допустимых значений X в пространстве R^N, т.е. $x \in X \subset R^N$. Для определенности будем полагать, что глобальный критерий желательно максимизировать. Необходимо решить задачу математического программирования

$$F(x) \to \max, x \in X. \quad (1)$$

Примером глобального критерия может быть стоимость создаваемой системы. Если проектируемая система сложная, например, самолет, то количество варьируемых конструктивных параметров N может быть очень велико и задачу (1) нельзя решить обычными методами математического программирования. Здесь необходимо заметить, что стоимость всей системы $F(x)$ является неубывающей функцией от стоимостей подсистем $u \in R^M$, где u_i - стоимость i-ой подсистемы и глобальный критерий можно представит в виде

$$F(x) = \Phi(u(x)). \quad (2)$$

Далее будем рассматривать критерии вида (2), где $u_i(x), i=\overline{1,M}$ - агрегированные параметры системы. Для решения задач, большой размерности вида (1) используются различные методы декомпозиции [2, 4-6, 9].

Функция $\Phi(u)$ называется неубывающей по u на множестве U, если для любых $u_1, u_2 \in U$ из условия $u_1 \leq u_2$ следует $\Phi(u_1) \leq \Phi(u_2)$.

Будем обозначать Парето-оптимальные решения на X и U символами $X_п$ и $U_п$. Определение оптимальности по Парето дано в работе [7].

Рассмотрим следующую задачу:

Пусть Ω - некоторое открытое множество, множество допустимых значений X содержится в Ω, $X \subset \Omega$, где

$$X = \{x \mid f(x) \geq 0, h(x) \geq 0, x \in \Omega \subset R^N\}, \qquad (3)$$

здесь $f(x) \in R^{N_1}$, $(x) \in R^{N_2}$.

В точке $x^0 \in X$ выполнены условия Куна-Таккера первого порядка [8] A1, если всякий ненулевой вектор $z \in R^N$, для которого

$$z^T \nabla f_k(x^0) \geq 0, k \in \{k \mid f_k(x^0) = 0, k = \overline{1, N_1}\},$$

$$z^T \nabla u_i(x^0) \geq 0, i = \overline{1,M},$$

$$z^T \nabla h_j(x^0) \geq 0, j = \overline{1, N_2},$$

совпадает с касательной к некоторой гладкой дуге, выходящей из x^0 и принадлежащей множеству

$$C = \{x \in X \mid u(x) \geq u(x^0)\}.$$

Направление $z \neq 0$ в точке $x^0 \in X$ называется возможным, если существует такое число $\bar{\beta} > 0$, такое что $x^0 + \beta z \in X$, для всех $0 \leq \beta \leq \bar{\beta}$ [1].

Обозначим множество всех возможных направлений Z. В данной задаче Z – выпуклый многогранный конус. Пусть $\bar{Z}$ - замыкание этого конуса.

Будем говорить, что в точке $x^0 \in X$ выполнено условие регулярности Слейтора[1] А2, если для любого $1 \leq k \leq N_1$ и любого $1 \leq i \leq M$ существует $x \in C$ такой, что $f(x) > \bar{0}, u(x) > \bar{0}$.

В работе [1] показано, что условие А1 эквивалентно условию А2, если $\bar{Z} = Z$ и доказано, что из выполнения условия А2 следует выполнение условия А1.

Для практического использования более удобно условие регулярности А2, но условие А1 дает возможность использовать теорию С. Смейла [10].

В работе [3] доказана следующая теорема:

Теорема. Пусть критерий $F(x)$, вектор-функции $u(x)$, $f(x)$, $h(x)$ в (2) дифференцируемы на Ω и в каждой точке $x^0 \in X \setminus X_п$ выполнены условия регулярности А1, тогда справедливы утверждения:

1. Если критерий $F(x)$ является неубывающей функцией, то для каждого $x \in X \setminus X_п$ найдутся векторы $v(x) \in R^{N_2}$, $\mu(x) \in R^{N_1}$, $\theta(x) \in R^{M}$, такие, что

$$\forall k\ \mu_k(x) f_k(x) = 0,\ \mu_k(x) \geq 0, \quad (4)$$

$$\forall i\ \theta_i(x) \geq 0, \quad (5)$$

$$\nabla F(x) = \sum v_j(x) \nabla h_j(x) + \sum \mu_k(x) \nabla f_k(x) + \sum \theta_i(x) \nabla u_i(x). \quad (6)$$

2. Если критерий $F(x)$ и вектор-функции $u(x)$, $f(x)$, $h(x)$ удовлетворяют условиям (4), (5), (6) и для любых $x^1, x^2 \in X$, таких что $u(x^1) \le u(x^2)$, существует гладкая дуга $\{x(t), 0 \le t \le 1\} \subset X$ с концами x^1, x^2 вдоль которой

$$(\sum \mu_k(x(t))\nabla f_k(x(t)) + \sum \theta_i(x(t))\nabla u_i(x(t)), x'(t)) \ge 0,$$

то критерий $F(x)$ удовлетворяет условию монотонности.

Во многих случаях условия теоремы могут не выполняться, но можно выделить некоторое множество недоминируемых решений и искать максимум критерия на этом множестве. Такими недоминиремыми вариантами могут быть критические Парето-оптимальные точки, которые были определены в работе С. Смейла [10].

Пусть для точек $x^1, x^2 \in X$ существует конечно-гладкая дуга $\{x(t), 0 \le t \le 1\} \subset X$ с концами x^1, x^2 вдоль которой

$$(\sum \theta_i(x(t))\nabla u_i(x(t)), x'(t)) \ge 0, \ \forall i \ \theta_i(x(t)) \ge 0,$$

в точках где производная существует.

Такую дугу будем называть допустимой критической кривой. Точка $x \in X$ называется критической Парето-оптимальной точкой, если не существует допустимых критических кривых, выходящих из данной точки. Множество таких точек будем обозначать $X_{кп}$, соответствующие им точки в пространстве агрегированных переменных будем обозначать $U_{кп}$.

Пример 1.

$$x_1 = u_1, x_2 = u_2,$$

$$X = U = \{u \mid u_1 \ge u_2^2, u_1 \le u_2^2 + 1, u_1 \le 4\}.$$

Множество U не является выпуклым. Множество Парето-оптимальных точек состоит только из одной точки $u = (4, 2)^T$. Заметим, что для данного множества условия теоремы не выполняются и ее нельзя использовать для проверки не возрастания критерия $F(x) = \Phi(u(x))$ на множестве U. Если для поиска Парето-оптимальных точек использовать методы возможных направлений, то можно заметить, что любая траектории поиска будут допустимым критическим путем, который приводит в критическую Парето-оптимальную точку.

Множеством критических Парето-оптимальных точек в данном примере будет множество

$$U_{кп} = \{u \mid (4, 2)^T \bigcup u_1 = u_2^2 + 1, -\sqrt{3} \le u_2 \le 0 \bigcup u_1 = 4, -2 \le u_2 \le -\sqrt{3}\}.$$

Выбор агрегированных переменных $u(x)$ может осуществляться различными способами. На практике агрегированные переменные следует выбирать так, чтобы функция $\Phi(u(x))$ была невозрастающей по u и множество Парето-оптимальных вариантов имело простую структуру.

Пример 2. Пусть

$$F(x) = x_1^2 + x_2,$$

$$X = \{x \mid -1 \le x_1 \le 1, -1 \le x_2 \le 1\}.$$

Если положить, что $u_1 = x_1, u_2 = x_2$, то функция $\Phi(u)$ не будет монотонной, но если определить:

$$u_1 = x_1^2, u_2 = x_2,$$

то $\Phi(u) = u_1 + u_2$. Данная функция является невозрастающей на множестве U и множество Парето-оптимальных точек состоит только из одно точки $U_п = (1,1)^T$, а множество $X_п$ состоит из двух точек $x^1 = (1,1)^T, x^2 = (-1,1)^T$.

Теперь можно сделать следующие выводы:

1. Существует много невыпуклых задач большой размерности вида (1) для которых условия теоремы не выполнены или проверка этих условий невозможна, но из физической постановки задачи можно сделать вывод функция $F(x) = \Phi(u(x))$ является неубывающей по u на множестве U, то для сокращения количества вычислений можно рассматривать множество критических Парето-оптимальных решений.

2. Выбор агрегированных параметров существенно влияет на структуру множества Парето-оптимальных решений.

Библиографический список:

1. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. - М.: Издательство иностранной литературы, 1963.

2. Киселев В.В., Гончаренко В.М. Математическое моделирование социально-экономических процессов. - М.: КНОРУС, 2020.

3. Краснощёков П.С., Морозов В.В., В.В. Фёдоров. Декомпозиция в задачах проектирования. //Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. - 1979. - №2.

4. Краснощеков П.С. Оптимизация в автоматизированном проектировании. - М.: МАКС Пресс, 2018.

5. Месарович М., Такхара Я. Общая теория систем: математические основы. - М.: МИР, 1978.

6. Морозов В.В, Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. - М.: URSS, 2009.

7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Физматлит, 2007.

8. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. - М.: МИР, 1972.

9. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности. - М.: Наука, 1981.

10. Smale, S. Global Analysis and Economics, I: Pareto optimum and a generalization of Morse Theory // Proceedings of the 1971 Brazil Dynamical Systems Symposium.

Оригинальность 96%