

УДК 512.642
DOI 10.51691/2541-8327_2022_12_30

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ПЕРМУТАЦИИ

Абдуллин С.Р.

ст. преподаватель,

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Дубровин В.М.

доцент ,к.т.н.,

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Киселёв В.В

доцент ,к.т.н.,

Московский государственный технический

университет им. Н.Э.Баумана

Москва, Россия

Аннотация.

В работе рассматривается оператор пермутации (пермутатор), - в нашем случае это оператор перестановки координат вектора в n -мерном линейном пространстве, так что все значения координат меняются местами. В вещественно-значном случае этот оператор имеет представление в виде матрицы с вещественными элементами. Исследуются некоторые его алгебраические и геометрические свойства, связь с циклическим представлением группы подстановок, приводятся примеры применения пермутаторов к получению корней из единичной матрицы.

Ключевые слова: Линейный оператор, перестановка, подстановка, оператор пермутации, пермутатор, собственные числа и векторы, корни из матрицы, характеристическое уравнение

SOME PROPERTIES OF THE PERMUTATION OPERATOR

Abdullin S.R.

senior lecturer,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Dubrovin V.M.

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Kiselev V.V.

Associate Professor, Candidate of Technical Sciences,

Bauman Moscow State Technical University

Moscow, Russia

Annotation.

In this paper, the permutation operator (permutator) is considered, - in our case, it is the operator for rearranging the coordinates of a vector in an n-dimensional linear space, so that all coordinate values are reversed. In the real-valued case, this operator has a representation in the form of a matrix with real elements. Some of its algebraic and geometric properties are investigated, the connection with the cyclic representation of the substitution group, examples of the use of permutators to obtain roots from a unit matrix are given.

Keywords: Linear operator, permutation, substitution, permutation operator, permutator, eigenvalues and vectors, matrix roots.

Основные понятия и определения

Для постановки задачи рассмотрим вектор n -мерного линейного пространства V^n с элементами из поля K [2,3] в следующем формате:

$x = \{x_1=r_1; x_2=r_2; \dots; x_k=r_k; \dots; x_n=r_n\}$ или, равнозначное обозначение,

$x = \{x_1=r(1); x_2=r(2); \dots; x_k=r(k); \dots; x_n=r(n)\}$ т.е. слева даны названия координат, а справа – их значения.

Определение Пермутатор (n -пермутатор) или оператор пермутации координат переставляет местами значения, принимаемые этими координатами (здесь обозначения аналогичны [1]):

$$\begin{aligned} T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) x = \\ T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) \{ x_1=r(1); x_2=r(2); \dots; x_k=r(k); \dots; x_n=r(n) \} = \\ \{ x_1=r(i_1); x_2=r(i_2); \dots; x_k=r(i_k); \dots; x_n=r(i_n) \} \end{aligned} \quad (1)$$

при этом $\forall k=1, n \quad k \neq i_k$

Здесь аргументы оператора T - это нижняя строка соответствующей этому оператору подстановки.

Предложение 1

Пермутатор является линейным оператором [3], в самом деле:

$$\begin{aligned} T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) (\alpha x + \beta y) = T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) \|\alpha x_i + \beta y_i\| = \\ \alpha T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) x + \beta T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) y \end{aligned} \quad (2)$$

где α, β элементы поля K , X и Y – векторы из V^n , в двойных вертикальных обкладках представлена матрица $n \times 1$ (вектор-столбец) в форме общего элемента

Предложение 2

Пермутатор является изометрическим оператором [3]

Доказательство

$$\|A(i_1, i_2, \dots, i_k)x\|_2 = \left[\sum_{j=1}^k (x_{i_j})^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^k (x_j)^2 \right]^{1/2}$$

Предложение 3

Множество пермутаторов в пространстве \mathbf{V}^n изоморфно некоторому подмножеству множества подстановок, т.е. операций над n -перестановками.

Доказательство

В самом деле, достаточно сопоставить пермутатор $T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n)$ с подстановкой $(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n)$. При этом произведению пермутаторов (слева – направо) соответствует произведение подстановок (справа – налево), а значит отображение гомоморфно [2]. Здесь биективность сопоставления очевидна.

Предложение 4

Предположим, что подстановка \mathbf{b} , изоморфная некоторому пермутатору \mathbf{T} , представлена в циклической форме [4]

$$\mathbf{b} = (t_1 \text{-циклы, } \mathbf{s}_1 \text{ штук}) \dots (t_k \text{-циклы, } \mathbf{s}_k \text{ штук}) \quad (3)$$

Здесь t_j - размер (длина) j -го цикла, \mathbf{s}_j - число циклов длины t_j , тогда имеет место очевидное равенство:

$$\sum_{j=1}^k t_j \cdot s_j = n \quad (4)$$

Замечание

В указанной формулировке надо добавить ограничение, что подстановка, соответствующая пермутатору при изоморфизме, не имеет единичных циклов, т.е. $t_1 \geq 2$. Кроме того, подразумевается:

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k \quad (5)$$

Предложение 5

Некоторая степень $m(T)$ пермутатора T_n равна единичной матрице E_n [3]. Действительно, в качестве $m(T)$ возьмем НОК (наименьшее общее кратное) размеров циклов t_i , участвующих в разложении соответствующей подстановки, т.е. имеет место формула

$$m(T) = \text{НОК} \{ t_1, t_2, t_3, \dots, t_k \} \quad (6)$$

Доказательство

Возведение подстановки в степень влечет за собой возведение в ту же степень каждого из циклов, участвующих в создании этой подстановки

$$T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n)^m \cong (i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n)^m = E_n \quad (7)$$

Лемма

Число пермутаторов n -го порядка в n -мерном линейном пространстве V^n , которое мы обозначим через $A(n)$, совпадает с числом n -перестановок [5], не имеющих неподвижных точек. Применяя формулу включения-исключения [4], получим рекуррентное соотношение для его вычисления:

$$A(n) = n! - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot A(k) \quad (8)$$

Замечание Можно указать и явную формулу для этого числа

$$A(n) = n!(1 - 1 + 1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^n/n!) \quad (9)$$

Матричное представление пермутатора T_n

Примем во внимание, что все значения координат после действия пермутатора $T(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n)$, меняются друг на друга (см. формулу (1)).

Из-за изоморфизма между пермутаторами и подстановками [2,3], каждому из составляющих изоморфную подстановку циклу $(i(k_j), i(k_{j+1}), i(k_{j+2}), \dots, i(k_{j+t-1}))$, где t – длина этого цикла, k_j – прообраз номера координаты первого элемента цикла, соответствует квадратная подматрица размера t , которая

имеет по одному единичному элементу в каждой строчке и в каждом столбце, кроме главной диагонали. Остальные элементы – нулевые.

Например, если $t=2$, то в роли такой подматрицы можно взять только одну матрицу:

$$(i(k_1), i(k_2)) \sim \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (10)$$

или, если $t=3$, то подматрица имеет уже две разновидности, в частности:

$$(i(k_1), i(k_2), i(k_3)) \sim \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

Поэтому матричное представление n -пермутатора T_n , изоморфного подстановке вида (2), (см. описание (3)), выглядит следующим образом:

Предложение 6

по главной диагонали расположены подматрицы [2], соответствующие циклам подстановки b вида (3), причём, не ограничивая общности, можно их расположить в порядке возрастания размеров подматриц (см. неравенство (5)); тогда сверху вниз расположены подматрицы размера t_1 в количестве s_1 штук, размера t_2 в количестве s_2 штук, и, так далее, размера t_k в количестве s_k штук. Все остальные элементы матричного представления равны нулю. Согласно формуле (4), подматрицы размером t_j $j=1, k$ заполняют всю главную диагональ матрицы n -пермутатора T_n .

Замечание

В частности, подстановка b может состоять из одного цикла.

Предложение 7

Квадратные подматрицы в матричном представлении \mathbf{n} -пермутатора \mathbf{T}_n размеров \mathbf{t}_j , $j=1,k$, - указанные в Предложении 6, - индуцируют в пространстве \mathbf{V}^n инвариантные подпространства [2], с размерностями \mathbf{t}_j в количествах \mathbf{S}_j штук.

Собственные числа и собственные векторы \mathbf{n} -пермутатора.

Уравнение для собственных значений в вещественном случае для некоторого конкретно взятого пермутатора

$$\mathbf{T}(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \quad (12)$$

имеет нетривиальное решение только если определитель матрицы $\|\mathbf{T}(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) - \lambda \cdot \mathbf{E}_n\|$ равен нулю [2], т.е.

$$|\mathbf{T}(i_1, i_2, \dots, i_h, \dots, i_n) - \lambda \cdot \mathbf{E}_n| = 0 \quad (13)$$

Предложение 8

После вычислений, в отличие от [1], получим характеристическое уравнение вида

$$\lambda^n - 1 = 0 \quad (14)$$

Доказательство

Первое слагаемое в значение определителя даёт главная диагональ. Второе слагаемое (число (-1)) получается умножением «единичек» по одной в каждом столбце и в каждой строчке [2]. Все остальные слагаемые – нули.

Возможны два различных случая: $n = 2m$ и $n = 2m+1$

1⁰ Пусть $n = 2m$.

Тогда, в вещественно-значном случае, имеем два корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$

$$(1.1) \lambda_1 = 1$$

Рассмотрим действия оператора отдельно в четно-мерных и нечетно-мерных инвариантных подпространствах [3].

(1.1.1) Пусть подматрица инвариантного подпространства имеет размер

$t = 2p$ и номер \mathbf{v} . Тогда эти $2p$ координат можно разбить на два p – подмножества

$M_1 = \{i(1), i(2), \dots, i(j), \dots, i(p)\}$ и $M_2 = \{i(p+1), i(p+2), \dots, i(p+j), \dots, i(2p)\}$

так, что при действии \mathbf{n} -пермутатора \mathbf{T}_n происходит обмен значениями координат между этими двумя подмножествами. Отсюда возникают

p «двойных» уравнений вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i(p+1)) &= r(i(1)) = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}(i(p+1)) \\ \mathbf{x}(i(p+2)) &= r(i(2)) = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}(i(p+2)) \\ &\dots \\ \mathbf{x}(i(2p)) &= r(i(p)) = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}(i(p+1)) \end{aligned} \quad (15a)$$

и ещё p аналогичных «двойных» уравнений вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i(1)) &= r(i(p+1)) = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}(i(1)) \\ \mathbf{x}(i(2)) &= r(i(p+2)) = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}(i(2)) \\ &\dots \\ \mathbf{x}(i(p)) &= r(i(2p)) = \lambda_1 \cdot \mathbf{x}(i(p)) \end{aligned} \quad (15b)$$

Здесь первое равенство – это действие пермутатора \mathbf{T}_n , а второе равенство

- это условие для собственного вектора с собственным значением $\lambda_1 = 1$

Очевидно, «отрезок» собственного вектора с номерами координат от $i(1)$ до $i(2p)$ имеет вид

$$\{\mathbf{c}(\mathbf{v}), \mathbf{c}(\mathbf{v}), \dots, \mathbf{c}(\mathbf{v})\} \quad (16)$$

– всего $2p$ координат.

Целиком, собственный вектор формируется из таких “отрезков» с номерами $\mathbf{v} = 1, 2, \dots, k$

(1.1.2) Пусть подматрица инвариантного подпространства имеет размер

$t = 2p+1$ и номер \mathbf{v} . Здесь результат будет аналогичен пункту (1.1.1)

$$(1.2) \lambda_2 = -1$$

Также рассмотрим действия оператора отдельно в четно-мерных и нечетно-мерных инвариантных подпространствах [3].

(1.2.1) Пусть подматрица инвариантного подпространства имеет размер $t = 2p$ и номер \mathbf{v} .

Предложение 8

Легко показать, что «отрезок» собственного вектора имеет вид

$$\{\mathbf{c}(\mathbf{v}), \mathbf{c}(\mathbf{v}), \dots, \mathbf{c}(\mathbf{v}), -\mathbf{c}(\mathbf{v}), -\mathbf{c}(\mathbf{v}), \dots, -\mathbf{c}(\mathbf{v})\} \quad (17)$$

- т.е. p значений $\mathbf{c}(\mathbf{v})$ и p значений $(-\mathbf{c}(\mathbf{v}))$

(1.2.2) Пусть подматрица инвариантного подпространства имеет размер $t = 2p+1$ и номер \mathbf{v} .

Предложение 9

В этом случае значения всех координат данного «отрезка» собственного вектора равны нулю:

$$\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\} \quad (18)$$

- т.е. $2p+1$ нулей

2⁰ Пусть $\mathbf{n} = 2\mathbf{m}+1$

Тогда, в вещественно-значном случае, имеем всего один корень $\lambda_1 = 1$, и, для вида собственных векторов имеют место пункты (1.1.1) и (1.1.2)

Следствие

Комбинируя рассмотренные случаи и подпункты, получим целиком вид собственных векторов для пермутатора \mathbf{T}_n при любом \mathbf{n} .

Геометрические свойства решений уравнения для собственных векторов

Переводя алгебраическую форму решений задачи на собственные значения и векторы в геометрическую форму, получим следующий результат, - совокупность собственных векторов представляется набором положительных конусов с вершиной в начале координат [3] (см. пункт

(1.1.1) и соотношение (16)), и набором полуконусов [3] (см. пункт(1.2.1) и соотношение (17)). Здесь каждый положительный конус зависит от одного параметра $c(\mathbf{v})$, а каждый полуконус - от двух параметров $c(\mathbf{v})$ и $(-1) \cdot c(\mathbf{v})$, где \mathbf{v} – номер конуса или полуконуса.

Библиографический список

1. Абдуллин С.Р., Дубровин В.М., Киселёв В. Некоторые свойства оператора транспозиции // Дневник науки. – 2021. - №12.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. часть III, Основные структуры алгебры. - М., МЦНМО, 2018, – 272 стр.
3. Шафаревич И.Р., Ремизов А.О., Линейная алгебра и геометрия. - М. Ижевск, 2014, - 554 стр.
4. Виленкин Н.Я. Комбинаторика, - М.: Наука, 1969, - 328 стр.

Оригинальность 95%