УДК 519.6
DOI 10.51691/2541-8327_2022_8_3

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

ТИЩЕНКО И.Ю.,
студент бакалавриата,
Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина. Краснодар, Россия

ТИЩЕНКО Д. Ю.,
студент бакалавриата,
Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина. Краснодар, Россия

ЗАВГОРОДНИЙ С. А.,
студент бакалавриата,
Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина. Краснодар, Россия

БЕРЕЖАНСКАЯ С. А.,
студент бакалавриата,
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского. Симферополь, Россия

Аннотация
В данной научной работе рассматриваются численные методы интегрирования функций заданной аналитическим и не аналитическим способом. Авторы предлагают новый метод численного интегрирования – метод равномерного распределения. Метод полностью отвечает основным свойствам качественных

методов численного интегрирования: универсальность, экономичность и хорошая обусловленность.

Ключевые слова: интеграл, площадь, метод, численные методы, метод равномерного распределения.

NUMERICAL INTEGRATION BY THE METHOD OF UNIFORM DISTRIBUTION

TISHCHENKO I. Y.,
undergraduate student,
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin,
Krasnodar, Russia

TISHCHENKO D. Y.,
undergraduate student,
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin,
Krasnodar, Russia

ZAVGORODNY S. A.,
undergraduate student,
Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin,
Krasnodar, Russia

BEREZHANSKAYA S. A.,
undergraduate student,
Crimean Federal University named after V. I. Vernadsky,
Simferopol, Russia

Abstract

In this scientific paper, numerical methods for integrating functions of a given analytical and non-analytical method are considered. The authors propose a new method of numerical integration – the method of uniform distribution. The method fully meets the basic properties of qualitative numerical integration methods: versatility, cost-effectiveness and good conditionality.

Keywords: integral, area, method, numerical methods, uniform distribution method.

В ряде многих научных и технических задач появляется необходимость вычисления интегралов, не имеющих элементарных первообразных, то есть невозможно выразить неопределенный интеграл в виде алгебраических или трансцендентных функций. А если и возможно выразить, то аналитическая запись получается настолько сложной, что вычислить интеграл становится очень сложно. В таких случаях прибегают к численным методам.

Численные методы интегрирования – это методы, основанные на представлении интеграла в виде предела интегральной суммы (суммы площадей), и позволяют определить эту сумму с приемлемой точностью.

Пусть необходимо вычислить неопределённый интеграл[1, 16]

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Где f(x) - подынтегральная функция, непрерывная в интервале [a, b].

Геометрически значение интеграла представляет собой площадь, ограниченную под интегральной функцией f(x), осью абсцисс и прямыми x=a и x=b. Вычисление интеграла сводиться к вычислению площади криволинейной трапеции(Рис. 1)

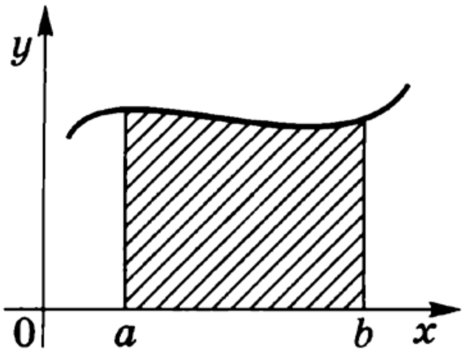

Рис. 1- Геометрический смысл определённого интеграла. Источник: авторская разработка

Заданный интеграл в общем проще всего вычислить по формуле Ньютона-Лейбница [3, 305]. По ней значение определённого интеграла определяется как разность значений первообразных на отрезке интегрирования

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Но на практике не всегда возможно воспользоваться данной формулой. Зачастую можно встретить функции, которые не имеют элементарных первообразных, их называют неэлементарные функции. Бывает что функция не задана аналитическим способом. В таких случаях используют методы численного интегрирования, основанные на аппроксимации подынтегральной функции [4, 256].

Качественные численные методы должны обладать следующими свойствами:

- *Экономичность.* Количество вычислений, использующихся в методе, должно быть сведено к минимуму;
- *Универсальность.* Метод должен позволять находить решение для функций заданных как аналитическим, так и не аналитическим способом.
- *Хорошая обусловленность.* Неустранимые погрешности не должны приводить к значительной итоговой ошибке.

В качестве одного из примеров методов численного интегрирования можно представить разложение подынтегральной функции в степенной ряд [2, 5]. Такое представление позволяет свести вычисление интеграла сложной функции к вычислению интеграла многочлена. Рассмотрим на примере интеграла

$$\int_{-1}^{1} \cos(x^2)\,dx$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора

$$\cos(x^2) \approx 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}$$

Подставим получившийся многочлен вместо подынтегральной функции

$$\int_{-1}^{1} 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}\,dx = \left(x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{216}\right)\Big|_{-1}^{1} = 1.80925$$

Показанный метод хорошо подходит для вычисления интегралов заданных аналитическим способом, но, к сожалению, не подходит для вычисления интеграла заданным не аналитическим способом.

Помимо разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора существует множество других методов, позволяющих вычислить определённый интеграл. К наиболее известным можно отнести: Метод прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Так же для вычисления определённого интеграла можно использовать, ранее нигде не описанный *метод равномерного распределения.*

Рассмотрим метод равномерного распределения:

1. Необходимо задать функцию f(x).
2. Необходимо ограничить функцию квадратом, так чтобы верхняя сторона касалась функции.
3. Необходимо равномерно распределить по квадрату n-е количество точек. Для этого необходимо вычислить шаг между точками по формуле:

$$h = \frac{R}{\sqrt{n}}$$

где R длина стороны квадрата.

4. Посчитать количество точек v, находящихся под функцией f(x)в границах промежутка [a,b]. При этом точки должны быть выше оси абсцисс.
5. Находим значение определённого интеграла по формуле:

$$I = \int_a^b f(x) = v \cdot h^2$$

Найдем значение определённого интеграла функции f(x)=cos(x^2) на промежутке [-1,1]. Зададим квадрат(Рис. 2), в котором равномерно будут распределены точки. Вершины, квадрата имеют координаты (1,1), (-1,1), (-1,-1) и (1,-1).

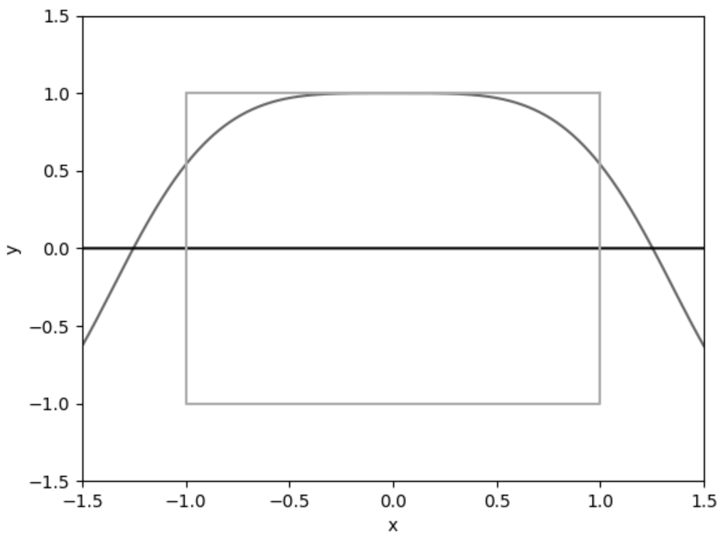

Рис 2 - Квадрат, в котором будут равномерно распределены точки. Тёмно-серым цветом выделен график функции f(x)= cos(x^2), светло-серым границы квадрата. Источник: авторская разработка

Распределим в выбранной области 6084 точки, тогда шаг между точками можно определить по формуле:

$$h = \frac{R}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{6084}} = 0.025641$$

Подсчитаем рассредоточенные точки внутри квадрата, которые попали под график функции (Рис 3). В результате пересчёта получим 2781 точку из 6084, то есть 2781 точек попали под график функции.

Зная количество точек, попавших под график функции можно найти площадь под заданной кривой по формуле:

$$I = \int_{-1}^{1} \cos(x^2) = v \cdot h^2 = 2781 \cdot 0.025641 = 1.8284$$

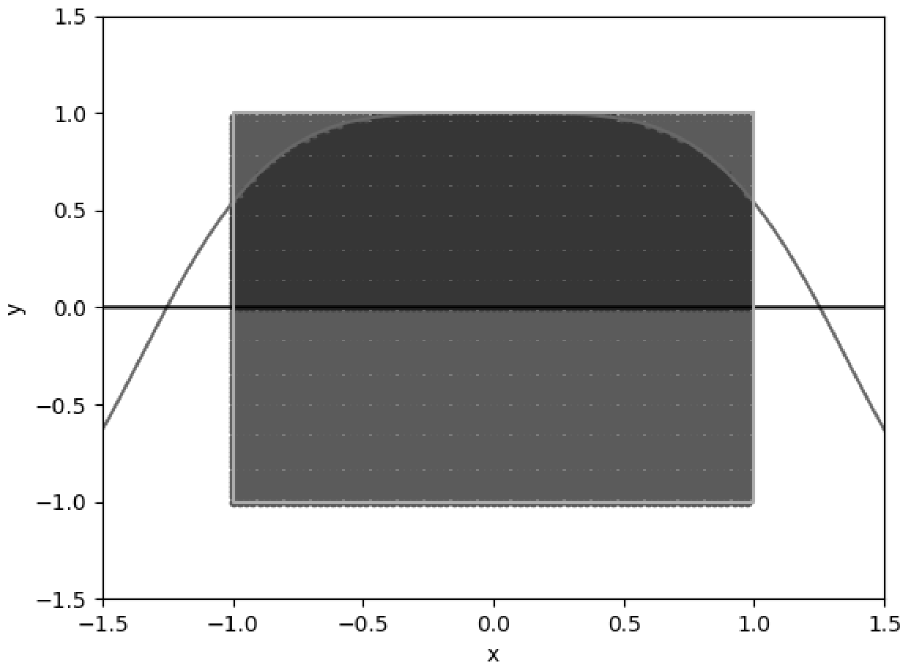

Рис. 3 - Равномерно распределённые 6084 точки в заданном квадрате. Тёмно-серым цветом обозначены точки, находящийся под графиком заданной функции на промежутке интегрирования [-1,1] и выше оси абсцисс. Светло-серым цветом обозначены все остальные точки. Источник: авторская разработка

Найдём относительную погрешность измерений по формуле:

$$\delta = \frac{X_{\partial} - X_{и}}{X_{\partial}} \cdot 100\% = \frac{1.80925 - 1.8284}{1.80925} \cdot 100\% = 1.06975\%$$

Найденное значение определённого интеграла отличается от истинного примерно на 1%. Для того чтобы определить точность нахождения значения определённого интеграла необходимо ряд вычислений с разным количеством начальных точек.

Проведя 200 вычислений(Рис. 4) для количества точек, в диапазоне от 1 до 15000, среднее значение относительной погрешности оказалось в районе 1.37%. Исходя из плаченого графика, можно сказать, что относительная погрешность напрямую зависит не только от количества точек.

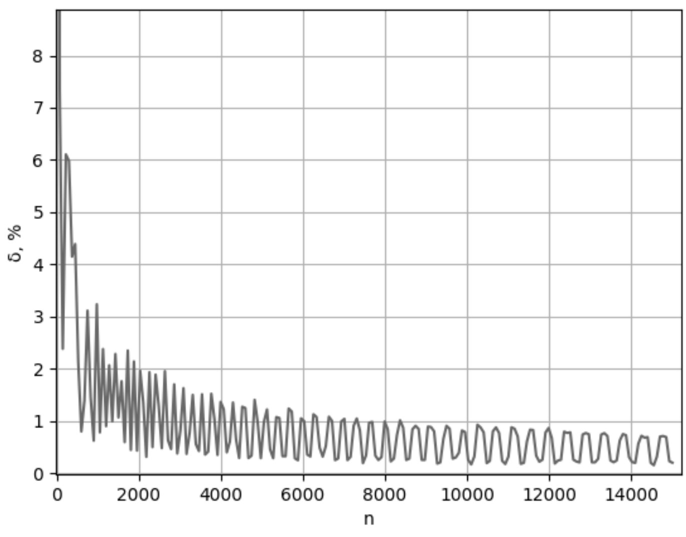

Рис. 4 - Зависимость относительной погрешности от количества точек.
Источник: авторская разработка

Можно выдвинуть предположение, что точность измерения зависит и от шага между точками. Для того чтобы проверить выдвинутое предположение необходимо также провести 200 вычислений, но при этом необходимо использовать разные квадраты, ограничивающие функцию f(x). Так же для простотывычислений будем использовать более простую функцию $f(x) = 9\text{-}x^2$.

Для начала найдем значение определённого интеграла, чтобы в дальнейшем определить относительную погрешность

$$\int_{-3}^{3} 9 - x^2 dx = 9x - \frac{x^3}{3}|_{-3}^{3} = 36$$

В ходе вычислений n будет принимать значений от 10 до 15000. Для первых двухсот вычислений зададим квадрат со стороной равной 18. В таком случае верхняя сторона квадрата будет касаться функции f(x).

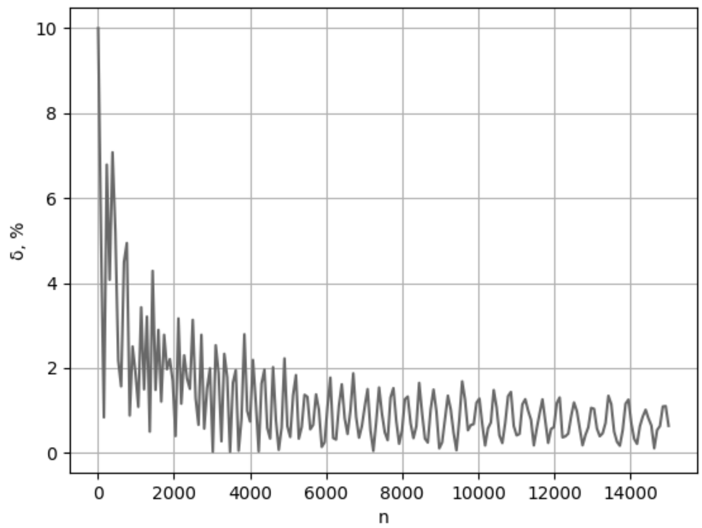

Рис. 5 - Зависимость функции f(x)=9-x2 от количества точек. Сторона квадрата равна 18 ед. Источник: авторская разработка

В результате проведённых первых вычислений (Рис. 5) средняя относительная погрешность составила 1.23%. Теперь для того чтобы проверить выдвинутое предположение необходимо провести вторые вычисления, при этом необходимо увеличить или уменьшить сторону квадрата, поскольку по указанной ранее формуле значение шага между точками прямо пропорционально длине стороны квадрата. Во вторых вычислениях (Рис. 6) длина стороны квадрата увеличена в 2 раза.

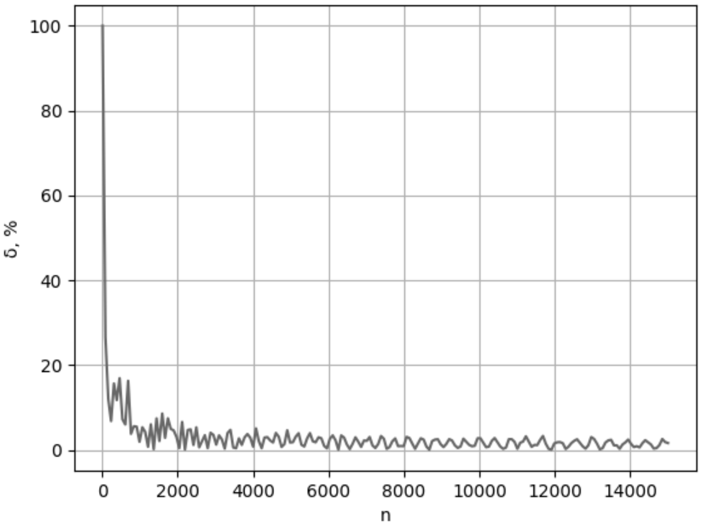

Рис. 6 - Зависимость функции f(x)=9-x^2 от количества точек. Сторона квадрата равна 36 ед. Источник: авторская разработка

Средняя относительная погрешность вторых вычислений составила 3,05%, что в свою очередь достаточно много. Уже из полученных данных можно с уверенностью сказать, что относительная погрешность в большей своей части зависит от шага между точками. Для того чтобы убедиться в этом окончательно проведём третьи (Рис. 7) вычисления. На этот раз увеличим длину стороны квадрата в 4 раза

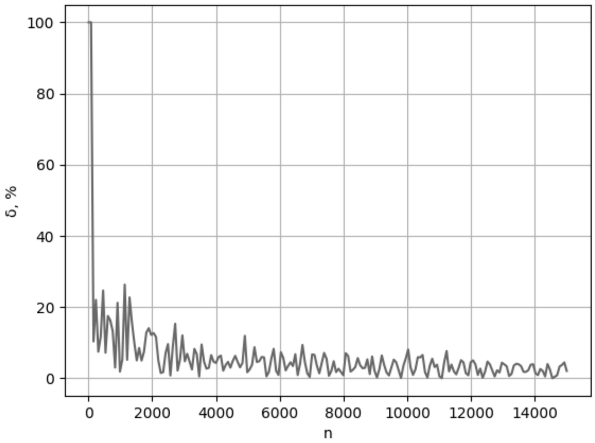

Рис. 7 - Зависимость функции f(x)=9-x2 от количества точек. Сторона квадрата равна 36 ед. Источник: авторская разработка

В третьих вычислениях относительная погрешность в среднем составляет 5.9%, что подтверждает, что точность вычислений зависит от шага между точками.

Продемонстрированный метод может быть использован не только для определения площади под кривой, но и для определения объема заданной поверхности, однако для этого необходимо преобразовать формулу для расчета шага между точками

$$h = \frac{R}{\sqrt[3]{n}}$$

Так же необходимо преобразовать формулу для вычисления площади (значения интеграла)

$$I = v \cdot h^3$$

Подводя итоги можно сказать, что метод равномерного распределения обладает основными свойствами качественного численного метода интегрирования. Его можно использовать для интегрирования функций заданных разными способами, данный метод не требует сложных расчетов и, что немало важно, у него достаточно низкая относительная погрешность.

Библиографический список:

1. Иванова Т.В. Численные методы в оптике. Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО, 2017 - 84 с.
2. Численное интегрирование: методические указания к практическим занятиям по дисциплинам «Вычислительные методы», «Численные методы» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. В.П. Добрица, В.А. Милых, Ю.А. Халин. Курск, 2017. - 16 с. Библиогр.: с. 16.
3. Пантелеев, А. В. Численные методы для инженеров и экономистов : учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. – Москва : Факториал, 2017. – 416 с. – ISBN 978-5-98688-200-0. – EDN XGORKT.
4. Численные методы : учебное пособие / авт.-сост. А.С. Шевченко. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2016. — 388 с.

Оригинальность 89%