УДК 514.86

К ПРЯМОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ И СВОЙСТВАМ ТЕНЗОРА В КУРСЕ ПО ТЕНЗОРНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Абдуллин С.Р.

ст. преподаватель,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Дерябина Г. С.

к. ф.-м. н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Лебедев С. В.

к. ф.-м. н., доцент,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Лебедева Н. В.

ст. преподаватель,

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация

В работе рассматриваются и анализируются особенности изложения определения и свойств тензоров в линейном и евклидовом пространствах в курсе «Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления», который читается кафедрой ФН-11 «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки», а также по направлениям подготовки 16.03.01 «Техническая физика», 24.05.01

«Технологии космического машиностроения». Разработаны модифицированные вариации изложения некоторых тем тензорного исчисления, которые могут быть использованы в факультативной и консультационной работе со студентами при освоении данного курса.

Ключевые слова: тензор 2-го ранга, тензоры высших рангов, диады, тензорное произведение линейных пространств, полиады.

ON THE DIRECT DEFINITION AND THE PROPERTIES OF A TENSOR IN THE COURSE OF THE TENSOR CALCULUS

Abdullin S.R.,
Senior lecturer,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
Deryabina G.S.,
Ph.D (Phys&Math), Associated professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
Lebedev S. V.,
Ph.D (Phys&Math), Associated professor,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
Lebedeva N. V.,
Senior lecturer,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia

Abstract
In the paper we consider the definition and the properties of a tensor in a linear and in a Eeuclidean space in the Tensor Analysis and Differential Geometry course that has been recently developed in the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics of Bauman Moscow State Technical University. We develope some modifications of some parts of the tensor calculus that can be used for teaching.

Keywords: the 2-range tensor, high ranges' tensor, diads, tensor product of linear spaces, polyads.

Введение

Тензорное исчисление более чем за век своего существования выработало логику развития основных представлений, понятий и результатов; свойства тензора в линейном и евклидовом пространствах определяются выбранным вариантом изложения, координатным или бескоординатным подходом. Последний способ называют прямым тензорным исчислением [3]. «Прямой тензорный язык позволяет легко видеть и предугадывать результаты, которые трудно увидеть в координатной версии тензорного исчисления. С другой стороны, нередки ситуации, когда прямое тензорное исчисление позволяет легко предугадать новый результат, строгое доказательство которого проще получить на основе координатной формы тензорного исчисления, поскольку имеется хорошо разработанная техника работы с объектами, зависящими от индексов. Поэтому свободное владение обеими формами тензорного исчисления совершенно необходимо любому профессиональному исследователю. К счастью, из свободного владения прямой формой вытекает и свободное владение координатной формой, хотя обратное не имеет места.» [4].

Согласно математической энциклопедии, при инвариантном способе определения тензор определяется как элемент модуля (линейного пространства), математически конструируемого как тензорное произведение исходных модулей (линейных пространств) V_1, V_2: “тензорное произведение всегда существует и может быть построено как фактормодуль свободного $A-$ модуля, порождённому множеством $V_1 \text{ x } V_2$, по подмодулю R, порождённому элементами вида

$$(x_1 + y, x_2) - (x_1, x_2) - (y, x_2), \qquad (1а)$$

$$(x_1, x_2 + z) - (x_1, x_2) - (x_1, z), \qquad (1б)$$

$$(cx_1, x_2) - c(x_1, x_2), \qquad (2а)$$

$$(x_1, cx_2) - c(x_1, x_2), \qquad (2б)$$

$$x_1, y \in V_1,\ x_2, z \in V_2, \text{c} \in A;$$

где A — коммутативное кольцо (поле), при этом $x_1 \otimes x_2 = (x_1, x_2) + \text{R}$.” [7, 322]

Известно также, что факторпространство линейного пространства по подпространству, являясь также линейным пространством, состоит из классов эквивалентности; критерий нахождения 2-х элементов пространства в одном классе эквивалентности – в том, что разность данных элементов принадлежит порождённому элементами подпространству (а сами порождающие элементы выше естественно принадлежат данному подпространству), так что элементы, уменьшаемые и вычитаемые (или сумма вычитаемых) в (1а-б), (2а-б), согласно данному критерию, принадлежат одному классу эквивалентности, или, другими словами, приравниваются друг к другу, гарантируя для тензорного произведения выполнение соответствующих свойств:

$$(x_1 + y) \otimes x_2 = x_1 \otimes x_2 + y \otimes x_2, \qquad (3а)$$

$$x_1 \otimes (x_2 + z) = x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes z, \qquad (3б)$$

$$(cx_1) \otimes x_2 = cx_1 \otimes x_2, \qquad (4а)$$

$$x_1 \otimes (cx_2) = cx_1 \otimes x_2. \qquad (4б)$$

Данные свойства (3)-(4) обеспечивают тензорный закон преобразования компонент векторных диад и тензора при замене базиса.

Базовый вариант прямого (инвариантного) способа определения тензора согласно [1] и возможности вариаций, дополнений

Базовый вариант. В учебном пособии [1] изложение тензорного исчисления доктором физ.–мат. наук, профессором Ю.И. Димитриенко основано на разработанном варианте бескоординатного (инвариантного) подхода, позволяющем представить изучаемый материал в достаточно понятном виде, доступном для восприятия не только будущих «узких» специалистов-математиков, но и студентов по прикладной математике, механике сплошных сред, физике, по другим инженерным специальностям. В данном подходе решена задача определения тензора на основании векторных наборов, с введением классов данных наборов.

В учебном курсе по тензорному исчислению важно наглядное объяснение устройства факторпространства — линейного пространства, являющегося тензорным произведением линейных пространств. В [1] учтено, что данный учебный курс предназначен для студентов, не являющимися «чистыми» математиками, и предложен один из наиболее понятных и математически строгих способов введения отношения эквивалентности на декартовом произведении линейных пространств (по сравнению с имеющимися учебными материалами): вводятся векторные наборы как совокупность n пар (диад) векторов, где левые векторы в парах – из 1-го векторного пространства размерности n, а правые – из 2-го векторного пространства (такой же или большей размерности, $m \geq n$). Эквивалентность векторных наборов определяется следующими пунктами:

1) неважна последовательность векторных пар;

2) в каждой векторной паре допускается умножение 1-го вектора на любое (ненулевое) число при одновременном делении 2-го вектора на то же число;

3) векторная пара с хотя бы одним нулевым вектором эквивалентна (тождественна) любой другой векторной паре с хотя бы одним нулевым вектором.

Вводится сумма однотипных левых (правых) факторизованных векторных наборов (далее предполагается $n = 2$):

$$\left[\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b^{[1]}}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b^{[2]}}\right] + \left[\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{c^{[1]}}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{c^{[2]}}\right] = \left[\overrightarrow{a_1}\left(\overrightarrow{b^{[1]}} + \overrightarrow{c^{[1]}}\right)\overrightarrow{a_2}\left(\overrightarrow{b^{[2]}} + \overrightarrow{c^{[2]}}\right)\right], \quad (5а)$$

$$\left[\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{c^{[1]}}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{c^{[2]}}\right] + \left[\overrightarrow{b_1}\overrightarrow{c^{[1]}}\overrightarrow{b_2}\overrightarrow{c^{[2]}}\right] = \left[\left(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{b_1}\right)\overrightarrow{c^{[1]}}\left(\overrightarrow{a_2} + \overrightarrow{b_2}\right)\overrightarrow{c^{[2]}}\right], \quad (5б)$$

- и умножение на число:

$$\lambda\left[\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b^{[1]}}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b^{[2]}}\right] = \left[(\lambda\overrightarrow{a_1})\overrightarrow{b^{[1]}}(\lambda\overrightarrow{a_2})\overrightarrow{b^{[2]}}\right], \quad (6а)$$

что в силу пункта 2 тождественно множителям у правых векторов:

$$\lambda\left[\overrightarrow{a_1}\overrightarrow{b^{[1]}}\overrightarrow{a_2}\overrightarrow{b^{[2]}}\right] = \left[\overrightarrow{a_1}\left(\lambda\overrightarrow{b^{[1]}}\right)\overrightarrow{a_2}\left(\lambda\overrightarrow{b^{[2]}}\right)\right]. \quad (6б)$$

(5), (6) необходимы для сохранения свойств (3), (4).

В силу (5-6) любой тензор 2-го ранга раскладывается в линейную комбинацию mn $(m = n, \overrightarrow{h_I} = \overrightarrow{e_I}$) базисных тензорных диад $\overrightarrow{e_I} \otimes \overrightarrow{h_J} = = \left[\overrightarrow{e_J}\left(\delta_I^J\overrightarrow{h_J}\right)\right]$:

$$\overleftrightarrow{T} = T^{IJ}\,\overrightarrow{e_I} \otimes \overrightarrow{h_J}\,, \quad (7)$$

что позволяет вводить сумму двух тензоров как тензор, представляемый его компонентами в виде суммы компонент суммируемых тензоров; пространство тензоров есть линейное пространство размерности n^2 .

При дополнительном введении векторов $\overrightarrow{f^I} = T^{IJ}\,\overrightarrow{h_J}$ разложение (7) допускает представление в виде суммы векторных диад:

$$\overleftrightarrow{T} = \overrightarrow{e_1} \otimes \overrightarrow{f^1} + \overrightarrow{e_2} \otimes \overrightarrow{f^2} . \qquad (8)$$

Отметим, что нередко [2-5, 8] тензор 2-го ранга постулируется, вводится как формальная сумма формальных произведений векторов в подобном (8) виде; напротив, в данном подходе присутствуют исключительно содержательные определения, и (8) выведено из свойств тензора как элемента тензорного пространства.

Тензоры 3-го и других высших рангов r вводятся по индукции с помощью тензоров предыдущего ранга $r-1$; последние рассматриваются в качестве правых элементов-векторов $\overrightarrow{b^{[I]}}$ 2-го векторного пространства (правых векторов в парах).

<u>Возможные вариации, дополнения базового варианта</u>. I) Рассмотрим разложение тензора 2-го ранга (7) в виде, позволяющем понять связь диады и тензора общего вида $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}\right]$ наиболее наглядным способом (выше в (7) и ниже используется правило Эйнштейна об отсутствии знаков суммы):

$$\overleftrightarrow{T} = \left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}\right] = \left[\left(a^I\overrightarrow{e_I} + \vec{0}\right)\vec{b}\left(\vec{0} + c^I\overrightarrow{e_I}\right)\vec{d}\right] = \left[\left(a^I\overrightarrow{e_I}\right)\vec{b}\left(a^I\vec{0}\right)\vec{d}\right] +$$

$$+ \left[\left(c^I\vec{0}\right)\vec{b}\left(c^I\overrightarrow{e_I}\right)\vec{d}\right] = a^I\left[\overrightarrow{e_I}\vec{b}\vec{0}\vec{d}\right] + c^I\left[\vec{0}\vec{b}\overrightarrow{e_I}\vec{d}\right] = a^I\left[\overrightarrow{e_I}\left(b^J\overrightarrow{e_J}\right)\overrightarrow{e_I}\left(b^J\vec{0}\right)\right] +$$

$$+ c^I\left[\overrightarrow{e_I}\left(d^J\vec{0}\right)\overrightarrow{e_I}\left(d^J\overrightarrow{e_J}\right)\right] = a^I b^J\left[\overrightarrow{e_J}\left(\delta_I^J\overrightarrow{h_J}\right)\right] + c^I d^J\left[\overrightarrow{e_J}\left(\delta_I^J\overrightarrow{h_J}\right)\right] =$$

$$= \left(a^I b^J + c^I d^J\right)\overrightarrow{e_I} \otimes \overrightarrow{h_J} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d}, \qquad (9)$$

что - при определении диады векторов соотношением

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \equiv a^I b^J \overrightarrow{e_I} \otimes \overrightarrow{h_J} \qquad (10)$$

- позволяет представить тензор 2-го ранга как сумму диад векторов, составляющих пары в исходном векторном наборе; а векторная диада, в свою очередь, представляется как частный вид тензора, компоненты которой (диады) есть, в соответствии с определением (10), произведение компонент участвующих векторов по принципу «каждый на каждый» (что гарантирует тензорный закон преобразования диад). Выведенное представление тензора, не представленное в таком виде в базисном варианте, $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}\right] = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d}$ пропедевтически важно, поскольку максимально наглядно раскрывает смысл рассматриваемого прямого подхода, взятого как базовый вариант в курсе тензорного исчисления.

II) Расширим п.2 эквивалентности векторных наборов, изменив его формулировку: «пара векторов в наборе сохраняет эквивалентность при переносе любого числового множителя, стоящего перед левым вектором пары, к правому вектору (той же) пары». Очевидно, что при ненулевом множителе имеем выполнение п. 2 в старой редакции, но при нулевом множителе имеем выполнение п.3 в силу соотношений эквивалентности (взяты из [6, 8]):

$$\vec{0}\vec{0} \sim (0\vec{a})\vec{0} \sim \vec{a}\left(0\vec{0}\right) \sim \vec{a}\vec{0}\text{, аналогично } \vec{0}\vec{0} \sim \vec{0}\vec{b}\,.$$

Таким образом. п.3 эквивалентности наборов не нужен при несущественном расширении п.2.

III) п.1 эквивалентности векторных наборов формален; он устраним, если с самого начала вести речь о векторном наборе как неупорядоченной совокупности векторных пар.

IV) Альтернативное (не методом индукции, как выше по базовому варианту) определение тензоров высших рангов r возможно по аналогии с изложенным определением тензора 2-го ранга (исходя из схожего мотива в [8]):

а) рассматриваются векторные наборы из n r-ок векторов линейного пространства (порядок которых неважен), и внутри r векторов допускается перенос произвольного множителя к любому вектору;

б) определяется сложение однотипных наборов; и также умножение набора на действительное число – посредством умножения левых векторов (в каждом из r-ок векторов);

в) вводятся классы эквивалентности наборов согласно а), вводятся также базисные классы эквивалентности (полиады); классы эквивалентности благодаря сложению однотипных наборов и умножению их на число раскладываются по базисным классам (полиадам) аналогично (9), что позволяет определить сумму классов через сумму их компонент; определяется умножение класса на действительное число согласно а) и б);

г) тензор r-ого ранга есть элемент линейного пространства, образованного классами эквивалентности;

V) что касается тензоров 2-го ранга в евклидовом пространстве (предыдущие пункты касались тензоров в линейном пространстве), то является полезным для обучения студентов наглядно представить тензор 2-го ранга евклидового пространства $\overleftrightarrow{T}$ как оператор, переводящий вектор в другой вектор с помощью скалярного произведения [6, 9]:

$$\vec{a} \xrightarrow{\overleftrightarrow{T}} \vec{b} \;:\quad \vec{b} = \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} \,.$$

Наиболее наглядно возможно представить двухранговый тензор как оператор на примере базисных диад $\vec{e_\iota} \otimes \vec{e_\jmath}$ (являющихся вырожденными операторами) в силу :

$$\left(\vec{e_\alpha} \otimes \vec{e_\beta}\right) \cdot \vec{e_\beta} = \vec{e_\alpha} \otimes \vec{e_\beta} \cdot \vec{e_\beta} = \vec{e_\alpha}\left(\vec{e_\beta} \cdot \vec{e_\beta}\right) = \vec{e_\alpha}\,, \qquad (11)$$

так что диада $\vec{e_\iota} \otimes \vec{e_\jmath}$ отображает $\vec{e_\jmath}$ в $\vec{e_\iota}$:

$$\vec{e_\jmath} \xrightarrow{\vec{e_\iota} \otimes \vec{e_\jmath}} \vec{e_\iota}\,. \qquad (12)$$

Обобщение (12) на полиаду ранга $p+q$ — вырожденный линейный оператор, отображающий q-полиаду в p-полиаду, имеющий вид:

$$\overrightarrow{e_{\jmath_1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{\jmath_q}} \xrightarrow{\overrightarrow{e_{\iota_1}} \otimes .. \otimes \overrightarrow{e_{\iota_p}} \otimes \overrightarrow{e_{\jmath_q}} \otimes ... \otimes \overrightarrow{e_{\jmath_1}}} \overrightarrow{e_{\iota_1}} \otimes \ldots \otimes \overrightarrow{e_{\iota_p}}\,,$$

где оператор реализуется q-кратным скалярным произведением оператора слева.

VI) При тензорных преобразованиях, связанных с изменением порядка выполнения диадного и скалярного произведений, или при решении подобных задач нередко опускается знак диадного произведения $\otimes$ (преобразование в (11) является одним из примеров). Поэтому в качестве альтернативы данному знаку выступает значимое отсутствие знака, применяемое в некоторых учебных пособиях. Данная альтернатива является факультативной, и, видимо, достаточно при обучении только упомянуть о данной возможности, продолжая применять однозначный и «хорошо зарекомендовавший себя» знак диадного произведения $\otimes$.

Выводы

Проведён анализ ряда преимуществ базового варианта изложения тензорного исчисления в учебном курсе «Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления», разработанном на кафедре ФН-11 «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, предложены некоторые модифицированные вариации изложения ряда тем для их более наглядного и доступного объяснения студентам в ходе факультативной работы.

Библиографический список:

1. Димитриенко Ю.И. Тензорный анализ / Механика сплошной среды. Т.1.— М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. — 463 с.

2. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. — Москва.: Наука, 1970. — 343 с.

3. Жидков А.В., Шабаров В.В. Элементы тензорного исчисления в евклидовом пространстве: тензорная алгебра. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.

4. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. – СПб: Нестор, 2001. – 276 с.

5. Зубов Л.М., Карякин М.И. Элементы тензорного исчисления. – Ростов: РГУ, 2003. – 108 с.

6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. – 512 с.

7. Математическая энциклопедия, том 5. Гл. редактор И. М. Виноградов. — М., Советская энциклопедия, 1977-1985 гг.

8. Пальмов В.А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа: Учебное пособие. — СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. — 109 с.

9. Рыжак Е.И. Бескоординатное тензорное исчисление для механики сплошных сред: Учебное пособие для вузов по направлению “Прикладная математика и физика”. — М.: МФТИ, 2011. — 169 с.

Оригинальность 85%