УДК 512.552
DOI 10.51691/2541-8327_2023_3_5

ОБ ОДНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ КОММУТАТОРОВ В АССОЦИАТИВНОМ КОЛЬЦЕ

Дерябина Г.С.
к.ф.-м.н., доцент,
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,
Москва, Россия

Пинчук И.А.
к.ф.-м.н., доцент,
Государственный Университет Просвещения,
Мытищи, Россия

Аннотация

Пусть **A** – ассоциативное кольцо, $T^{(n)} = T^{(n)}$ (**A**) – двусторонний идеал в **A**, порожденный всеми коммутаторами вида $[a_1, \dots, a_n]$, где $a_i \in$ **A**. Пусть $u_k = [a_1, \dots, a_k]$, $v_\ell = [b_1, \dots, b_\ell]$, где a_i, $b_j \in$ **A**. Пусть $x \in$ **A**. В 2015 году А.В. Гришин и С.В. Пчелинцев доказали, что $[u_k, x]\ [v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}$, если **A –** алгебра над кольцом, содержащим ½. Цель данной работы – доказательство этого утверждения для любого ассоциативного кольца **A.**

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, коммутатор длины n, произведение коммутаторов, идеал.

ON A CERTAIN PRODUCT OF COMMUTATORS IN AN ASSOCIATIVE RING

Deryabina G.S.

PhD, Associate Professor,

Bauman Moscow State Technical University,

Moscow, Russia

Pinchuk I.A.

PhD, Associate Professor,

State University of Education,

Mytishchi, Russia

Abstract

Let **A** be an associative ring, let $T^{(n)} = T^{(n)}$ (**A**) be the two-sided ideal in **A** generated by all commutators of the form $[a_1, \ldots, a_n]$ where $a_i \in$ **A**. Let $u_k = [a_1, \ldots, a_k]$, $v_\ell = [b_1, \ldots, b_\ell]$ where a_i, $b_j \in$ **A**. Let $x \in$ **A**. In 2015 A.V. Grishin and S.V. Pchelintsev proved that $[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}$ if **A** is an algebra over a ring that contains ½. The aim of the present work is to prove this assertion for any associative ring **A.**

Keywords: associative ring, commutator of length n, product of commutators, ideal.

Пусть **A** – ассоциативное кольцо с единицей или без единицы. Напомним, что левонормированные коммутаторы $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ($a_i \in$ **A**) определяются рекурсивно равенствами

$$[a_1, a_2] = a_1a_2 - a_2a_1, \qquad [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n] \quad (a_i \in \mathbf{A}).$$

Пусть $T^{(n)} = T^{(n)}(\mathbf{A})$ – двусторонний идеал в **A**, порожденный всеми коммутаторами вида $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ($a_i \in \mathbf{A}$). Отметим, что

$$T^{(2)} \supseteq T^{(3)} \supseteq \ldots \supseteq T^{(n-1)} \supseteq T^{(n)} \supseteq \ldots .$$

Для любого ассоциативного кольца **A**, любых $m, n > 1$ и любых $a_i, b_j \in \mathbf{A}$ выполнено

$$[a_1, a_2, \ldots, a_m]\,[b_1, b_2, \ldots, b_n] \in T^{(m+n-2)};$$

это было доказано В.Н. Латышевым [2, Лемма 1]. Кроме того, если хотя бы одно из чисел m, n нечетное, то для любого ассоциативного кольца **A**, любых $m, n > 1$ и любых $a_i, b_j \in \mathbf{A}$ выполняется

$$3\,[a_1, a_2, \ldots, a_m]\,[b_1, b_2, \ldots, b_n] \in T^{(m+n-1)}.$$

Это доказали Г.С. Дерябина и А.Н. Красильников [3, Theorem 1.1]. В то же время в этом случае, вообще говоря,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_m]\,[b_1, b_2, \ldots, b_n] \notin T^{(m+n-1)}$$

(см. [3]).

Пусть $u_k = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$, $v_\ell = [b_1, b_2, \ldots, b_\ell]$ ($a_i, b_j \in \mathbf{A}$). Пусть $x \in \mathbf{A}$. Из приведенного выше результата В.Н. Латышева следует, что

$$[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell)}.$$

В 2015 году в [1, Лемма 1] А.В. Гришин и С.В. Пчелинцев доказали, что если **A** – алгебра над полем характеристики 0, то верно более сильное утверждение

$$[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}.$$

Это утверждение играет важную роль в доказательстве основных результатов работы [1].

Нетрудно заметить, что в доказательстве из [1] неявно используется операция умножения элементов из **A** на ½, поэтому его нельзя распространить на любые ассоциативные кольца. В то же время это доказательство остается верным, когда **A** – алгебра над кольцом, содержащим ½.

Цель нашей работы – распространить указанный выше результат работы [1] на произвольные ассоциативные кольца. Нашим основным результатом является

Теорема. Пусть **A** – произвольное ассоциативное кольцо с единицей или без единицы. Пусть $u_k = [a_1, a_2, \ldots, a_k]$, $v_\ell = [b_1, b_2, \ldots, b_\ell]$, где a_i, $b_j \in$ **A**. Пусть $x \in$ **A**. Тогда

$$[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}\,.$$

Доказательство. Сначала мы установим, что

$$2[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}. \tag{1}$$

Этим мы дадим другое доказательство Леммы 1 из [1].

Так как $[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b$ для любых $a, b, c \in$ **A**, то

$$[x^2, u_k, v_\ell] = x[x, u_k, v_\ell] + [x, u_k]\,[x, v_\ell] + [x, v_\ell]\,[x, u_k] + [x, u_k, v_\ell]x.$$

Ясно, что $[x^2, u_k, v_\ell]$, $x\,[x, u_k, v_\ell]$, $[x, u_k, v_\ell]x \in T^{(k+\ell+1)}$, поэтому

$$[x, u_k]\,[x, v_\ell] + [x, v_\ell]\,[x, u_k] = [x^2, u_k, v_\ell] - x\,[x, u_k, v_\ell] - [x, u_k, v_\ell]x \in T^{(k+\ell+1)}.$$

С другой стороны,

$$[x, u_k]\,[x, v_\ell] + [x, v_\ell]\,[x, u_k] = 2[x, u_k]\,[x, v_\ell] - [[x, u_k], [x, v_\ell]],$$

а так как $[[x, u_k], [x, v_\ell]] \in T^{(k+\ell+2)} \subseteq T^{(k+\ell+1)}$, то

$$2[x, u_k]\,[x, v_\ell] = [x, u_k]\,[x, v_\ell] + [x, v_\ell]\,[x, u_k] + [[x, u_k], [x, v_\ell]] \in T^{(k+\ell+1)},$$

то есть справедливо (1).

Теперь мы установим, что

$$3^m\,[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}$$

для некоторого целого положительного числа m.

Действительно, если k – чётное число, то $[u_k, x]$ является коммутатором нечётной длины, поэтому, как доказано в [3],

$$3\,[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}.$$

Аналогично, если ℓ - чётное число, то $3\,[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}$. Таким образом, осталось доказать утверждение в случае, когда $k = 2k' + 1$ и $\ell = 2\ell' + 1$ – нечётные числа. Нам потребуется следующая

Лемма. Пусть $h \in T^{(n)}$, $a, b \in A$. Тогда

$$3\,[h, a, b] \in T^{(n+2)}.$$

Доказательство. Ясно, что $T^{(n)}$ есть линейная оболочка элементов вида $u_n d$, где

$$u_n = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \qquad (a_i \in \mathbf{A})$$

и $d \in \mathbf{A}$. Следовательно, достаточно проверить, что $3\,[u_n d, a, b] \in T^{(n+2)}$, где a, b, $d \in \mathbf{A}$, а u_n определено выше.

Так как $[rs, t] = r[s, t] + [r, t]s$ для любых $r, s, t \in \mathbf{A}$, то

(2) $$[u_n d, a, b] = u_n[d, a, b] + [u_n, a][d, b] + [u_n, b][d, a] + [u_n, a, b]d.$$

Как доказано в [3],

(3) $$3\,u_n[d, a, b] \in T^{(n+2)}.$$

Ясно также, что

(4) $$[u_n, a, b]d \in T^{(n+2)}.$$

С другой стороны, выполнено

$$[ab, u_n, d] = a[b, u_n, d] + [a, u_n][b, d] + [a, d][b, u_n] + [a, u_n, d]b.$$

Так как $[ab, u_n, d], a[b, u_n, d], [a, u_n, d]b \in T^{(n+2)}$, то

$$[a, u_n][b, d] + [a, d][b, u_n] = - [ab, u_n, d] + a[b, u_n, d] + [a, u_n, d]b \in T^{(n+2)}.$$

Значит,

$$[a, u_n][b, d] + [a, d][b, u_n] = [u_n, a][d, b] + [u_n, b][d, a] – [[u_n, b], [d, a]] \in T^{(n+2)},$$

а так как $[[u_n, b], [d, a]] \in T^{(n+3)} \subseteq T^{(n+2)}$, мы получаем, что

(5) $$[u_n, a][d, b] + [u_n, b][d, a] \in T^{(n+2)}.$$

Из (2), (3), (4) и (5) немедленно следует, что $3\,[u_n d, a, b] \in T^{(n+2)}$. Лемма доказана.

Напомним, что нам осталось доказать, что $3^m [u_k, x] [v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}$ для некоторого m, где $k = 2k' + 1$ и $\ell = 2\ell' + 1$ – нечётные числа. Заметим, что

$$[u_k x, x, v_\ell] = u_k[x, x, v_\ell] + [u_k, x][x, v_\ell] + [u_k, v_\ell][x, x] + [u_k, x, v_\ell]x.$$

Так как $[x, x, v_\ell] = 0$ и $[x, x] = 0$, то

(6) $$[u_k x, x, v_\ell] = [u_k, x][x, v_\ell] + [u_k, x, v_\ell]x .$$

Ясно, что

(7) $$[u_k, x, v_\ell]x \in T^{(k+\ell+1)}.$$

С другой стороны, коммутатор $[u_k x, x, v_\ell]$ может быть записан как линейная комбинация коммутаторов вида $[u_k x, x, b_{f(1)}, \ldots, b_{f(\ell)}]$, где $v_\ell = [b_1, b_2, \ldots, b_\ell]$, а $f \in S_n$ – подстановки на множестве 1, 2, …, ℓ. Так как $\ell = 2\ell' + 1$, то по лемме

$$3^{(\ell'+1)} [u_k x, x, b_{f(1)}, \ldots, b_{f(\ell)}] \in T^{(k+2\ell'+2)} = T^{(k+\ell+1)},$$

то есть

(8) $$3^m [u_k x, x, v_\ell] \in T^{(k+\ell+1)},$$

где $m = \ell'+1$. Теперь из (6), (7) и (8) следует, что

$$3^m [u_k, x] [v_\ell, x] = - 3^m [u_k, x] [x, v_\ell] \in T^{(k+\ell+1)} .$$

Таким образом, мы установили, что

(9) $$3^m [u_k, x] [v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)}.$$

Отметим, что $3^m + 1 = 2q$ – чётное число, поэтому в силу (1)

$$(3^m + 1) [u_k, x] [v_\ell, x] = q (2[u_k, x] [v_\ell, x]) \in T^{(k+\ell+1)}.$$

Отсюда, учитывая (9), получаем

$$[u_k, x]\,[v_\ell, x] = (3^m + 1)\,[u_k, x]\,[v_\ell, x] - 3^m\,[u_k, x]\,[v_\ell, x] \in T^{(k+\ell+1)},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Библиографический список:

1. Гришин А.В., Пчелинцев С.В. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Математический сборник. – 2015. – Т. 206. – № 11. – С. 113–130.

2. Латышев В.Н. О конечной порожденности T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ // Сибирский математический журнал. – 1965. – Т. 6. – № 6. – С. 1432–1434.

3. Deryabina G., Krasilnikov A. Some products of commutators in an associative ring // International Journal of Algebra and Computation. – 2019. – V. 29. – № 2. – P. 333–341.

Оригинальность 90%